

2. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 02.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 (Keine Assoziativität bei Maschinenzahlen)

Es seien drei Maschinenzahlen x^1, x^2, x^3 mit $|x^1| \gg |x^2|, |x^3|$ gegeben (z. B. $x^1 \sim 10^4$, $x^2 \sim x^3 \sim 1$). Welcher der beiden Algorithmen

$$\text{a) } (x^1 \oplus x^2) \oplus x^3, \quad \text{b) } x^1 \oplus (x^2 \oplus x^3)$$

ist numerisch stabiler zur Berechnung der Summe $x^1 + x^2 + x^3$?

Aufgabe 2 (Konditionierung der Wurzelberechnung)

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 0$ und $p^2/4 - q > 0$. Bestimmen Sie die Konditionszahlen k_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ für die Berechnung der beiden Lösungen y_1, y_2 der quadratischen Gleichung

$$y^2 - py + q = 0.$$

Wann ist das Problem gut konditioniert?

Hinweis: Stellen Sie p und q durch y_1 und y_2 dar und differenzieren Sie diese Beziehungen nach p und nach q .

Aufgabe 3 (Konditionierung von Division und Potenzbildung)

Untersuchen Sie die Konditionierung der folgenden Rechenoperationen:

a) Division: $f(x, y) = x/y$ ($y \neq 0$), speziell $f(x) = 1/y$

b) Potenzbildung: $f(x, y) = x^y$ ($x > 0$), speziell $f(x) = \sqrt{x}$

Wie groß ist der maximale relative Fehler im Ergebnis, ausgedrückt in der Form $\alpha\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, wenn die relativen Fehler in den Argumenten durch ε beschränkt sind?

Aufgabe 4 (Fehlerfortpflanzung)

Zeigen Sie, daß bei funktionalen Zusammenhängen der Form

$$y = f(x_1, \dots, x_m) := c \frac{x_1 \cdots x_r}{x_{r+1} \cdots x_m}$$

mit einem $1 < r \leq m$, der relative Fehler bei Störungen (in erster Näherung) abschätzbar ist durch

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|.$$