Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

02.11.2005

3. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 09.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Wurzelberechnung mit Gleitpunkt-Arithmetik (4 Punkte)*

Auf einer Rechenmaschine sei 4-stellige Gleitpunktarithmetik ($b = 10$) mit natürlicher Rundung möglich, wobei die Grundoperationen gemäß $x \circledast y = \mathrm{rd}(x * y)$ realisiert sind ($\mathrm{eps} = 0.5 \cdot 10^{-3}$).

a) Zeigen Sie, dass der relative Fehler bei der Operation $\mathrm{rd}(\sqrt{\mathrm{rd}(x)})$ in erster Näherung durch $3/2\,\mathrm{eps}$ beschränkt ist.

b) Berechnen Sie unter diesen Bedingungen möglichst gute Näherungen für die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 39.6x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, und geben Sie Schranken für die relativen Fehler an.

Aufgabe 2 *Kondition und Gutartigkeit (4 Punkte)*

Gesucht ist ein Algorithmus zur Auswertung der Funktion

$$f(\varphi, \lambda) = \frac{4/5}{\sqrt{\pi \cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad \lambda \in (\pi/4, \pi)\ .$$

a) Ist diese Aufgabe gut konditioniert? *Hinweis:* $ab \leq (\pi a^2 + \lambda b^2)/(2\sqrt{\pi\lambda})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Die durch die Umformung $f(\varphi, \lambda) = 0.8 \cdot (\pi + (\lambda - \pi)\sin^2 \varphi)^{-1/2}$ induzierte Auswertungsmethode vermeidet die Berechnung von $\cos\varphi$ und ist somit schneller als die direkte Auswertung. Vergleichen Sie die beiden Wege in Hinblick auf ihre numerische Gutartigkeit.

Aufgabe 3 *Die natürliche Matrizennorm (4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^n$ durch

$$||A|| := \sup\{||Ax||/||x||\ , \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$$

eine mit ihr verträgliche Matrizennorm erklärt ist. Sie heißt die von $\|\cdot\|$ erzeugte „natürliche“ Matrizennorm. Warum ist die Quadratsummennorm $||A|| := \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$ keine natürliche Matrizennorm?

Aufgabe 4 *Über Eigenwerte hermitescher und positiv definiter Matrizen (4 Punkte)*

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind reell.

b) Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

c) Für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt mit ihrem kleinsten bzw. größten Eigenwert $\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\min}||x||_2^2 \ \leq\ (Ax, x)_2 \ \leq\ \lambda_{\max}||x||_2^2\ , \quad x \in \mathbb{C}^n\ .$$