

4. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 16.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Kondition unitärer Matrizen (3 Punkte)*

Zeigen Sie, dass unitäre Matrizen $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Spektralkondition $\text{cond}_{\text{nat}} U = 1$ besitzen.

Aufgabe 2 *Fehlerverstärkung bei Lösung linearer Gleichungssysteme (4 Punkte)*

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der relative Fehler $\|\Delta x\|_{\infty} / \|x\|_{\infty}$, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens $\pm 1\%$ und der in den Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$ beträgt? Zeichnen Sie die Punktmenge im \mathbb{R}^2 , in der gemäß dieser Abschätzung die Lösung $x + \Delta x$ des gestörten Systems liegt.

Aufgabe 2 *Gaußalgorithmus (4 Punkte)*

Gegeben seien die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spaltenpivotierung.
- Bestimmen Sie die Matrizen P und L aus der LR-Zerlegung $PA = LR$.
- Berechnen Sie die Inverse A^{-1} .
- Der Vektor b sei mit einem relativen Fehler $\|\Delta b\|_{\infty} / \|b\|_{\infty}$ von 10 % behaftet. Geben Sie eine obere Schranke für den zu erwartenden Fehler $\|\Delta x\|_{\infty} / \|x\|_{\infty}$ der Lösung x an.

Aufgabe 3 *Eindeutigkeit der LR-Zerlegung (4 Punkte)*

- Verifizieren Sie, dass die regulären unteren Dreiecksmatrizen $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (und ebenso die regulären oberen Dreiecksmatrizen $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$) bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden. Ist diese Gruppe abelsch?
- Folgern Sie, dass die LR-Zerlegung $A = LR$ einer Matrix A nach Gauß (falls sie existiert) eindeutig bestimmt ist.