Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek 16.11.2005

# 5. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 23.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

**Aufgabe 1** *Numerischer Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahrens (4 Punkte)*
Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, für die eine LR-Zerlegung existiert. Zeigen Sie:

a) Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von $Ax = b$ erfordert $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Operationen für $n \to \infty$ (eine Operation = eine Multiplikation, eine Addition oder eine Division).

b) Die Inverse $A^{-1}$ kann unter Ausnutzung der Beziehung $A^{-1} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ mit maximal $8/3\, n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Operationen $(n \to \infty)$ berechnet werden (im Sinne einer oberen Abschätzung), wobei $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ die Lösungen von $Ax^{(i)} = e^{(i)}$, $1 \le i \le n$, und $e^{(1)}, \cdots, e^{(n)}$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{C}^n$ sind.

c) *(Zusatzaufgabe)* Können Sie eine Realisation des Gaußschen Eliminationsverfahrens formulieren, die eine schnellere Inversenberechnung ermöglicht? Geben Sie den Aufwand dieser Variante an.

**Aufgabe 2** *LR-Zerlegung nach Cholesky (4 Punkte)*
Bestimmen Sie die LR-Zerlegung nach Gauß und die $\tilde{L}\tilde{L}^T$-Zerlegung nach Cholesky der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche Beziehung besteht zwischen den Matrizen $L_{\text{Gauß}}$ und $\tilde{L}_{\text{Cholesky}}$?

**Aufgabe 3** *Cholesky-Zerlegung einer Bandmatrix (4 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 34 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 58 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Cholesky die Cholesky-Zerlegung $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ .

b) Leiten Sie <u>hiermit</u> die LR-Zerlegung von $A$ im Sinne von Gauß ab.

**Aufgabe 4** *Überbestimmte Gleichungssysteme (4 Punkte)*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Untersuchen Sie, ob $Ax = b$ lösbar ist (mit Begründung).

b) Bestimmen Sie eine „Lösung“ von $Ax = b$ im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

c) Ist diese Lösung eindeutig?

d) Ist $A^T A$ positiv definit?