

6. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 30.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 Nichtlineare überbestimmte Gleichungssysteme (4 Punkte)

Eine radioaktive Substanz zerfällt gemäß

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

wobei N die Substanzmenge und N_0 deren Wert zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Halbwertszeit $t_{1/2}$ (das ist der Zeitpunkt mit $N(t_{1/2}) = N_0/2$) und die Anfangsmenge N_0 aus folgender Meßreihe:

t	2	4	6	8
N	90	12.2	7.4	2.7

Hinweis: Berechnen Sie $t_{1/2}$ und N_0 nicht direkt, sondern über eine lineare Gleichung, die Sie durch eine Umformung gewinnen.

Aufgabe 2 QR-Zerlegung nach Householder (4 Punkte)

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Householder-Verfahrens.

Aufgabe 3 Eindeutigkeit der QR-Zerlegung (4 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{Rang } A = n$. Zeigen Sie, daß die QR-Zerlegung von A unter der Normierungsbedingung $r_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$, eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4 Lösung der Normalgleichung mit QR-Zerlegung (4 Punkte)

Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit Hilfe der QR-Zerlegung von A läßt sich das Normalgleichungssystem $A^T A x = A^T b$ überführen in das dazu äquivalente Dreieckssystem $R x = Q^T b$. Zeigen Sie

$$\text{cond}_{\text{nat}} R \leq \text{cond}_{\text{nat}} A.$$

Wie groß ist der numerische Aufwand dieser Methode zur Lösung des Normalgleichungssystems verglichen mit dem der direkten Cholesky-Zerlegung von $A^T A$?