

## 7. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 7.12.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

### Aufgabe 1 *Verschiedene Darstellungen des Interpolationspolynoms (4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $p$  zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3
$x_i$	0	1	2	3
$f_i$	1	3	2	4

in Lagrangescher, Newtonscher und Nevillescher Darstellung und berechnen Sie  $p(5)$ .

b) Fügen Sie der obigen Tabelle den Stützpunkt  $(x_4, f_4) = (6, 6)$  hinzu, und lösen Sie Aufgabe a) mit der so erweiterten Tabelle.

### Aufgabe 2 *Interpolation und Bestapproximation (4 Punkte)*

Bestimmen Sie approximierende Polynome  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , zu der Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

a) durch Interpolation in  $P_4$  nach Newton bzgl. der Stützstellen  $x_i = -2 + i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ;

b) durch Gauß-Ausgleich in  $P_2$  bzgl. der Stützstellen  $x_i = -2 + i/2$ ,  $i = 0, \dots, 8$  („Ausgleichs-  
parabel“).

Skizzieren Sie den jeweiligen Funktionsverlauf und vergleichen Sie die Approximationsfehler im Punkt  $x = 1/3$ . Wie lautet das Ergebnis unter b) für  $p_2 \in P_3$ ? (keine Rechnung!)

### Aufgabe 3 *Polynomauswertung mit dem Horner-Schema (3 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas den Wert der Ableitung  $f'(2)$  der Funktion

$$f(x) = \frac{-2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 5x - 1}{-2x^5 + 6x^4 - 10x^2 + 6x - 2}.$$

### Aufgabe 4 *Fehlerasymptotik bei Polynominterpolation (4 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , auf einem Intervall  $[a, b]$ . Zeigen Sie, daß das Restglied  $R_n(x)$  bei Lagrange-Interpolation von  $f$  über  $n + 1$  Stützstellen aus  $[a, b]$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null konvergiert. Für jedes  $n$  können hierbei die Stützstellen in  $[a, b]$  beliebig gewählt werden.

Was unterscheidet dieses Beispiel von dem in der Vorlesung angegebenen Beispiel  $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ , für das die interpolierende Polynomfolge nicht gleichmäßig konvergiert?