

7. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 7.12.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Verschiedene Darstellungen des Interpolationspolynoms (4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
f_i	1	3	2	4

in Lagrangescher, Newtonscher und Nevillescher Darstellung und berechnen Sie $p(5)$.

b) Fügen Sie der obigen Tabelle den Stützpunkt $(x_4, f_4) = (6, 6)$ hinzu, und lösen Sie Aufgabe a) mit der so erweiterten Tabelle.

Aufgabe 2 *Interpolation und Bestapproximation (4 Punkte)*

Bestimmen Sie approximierende Polynome p_i , $i = 1, 2$, zu der Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

a) durch Interpolation in P_4 nach Newton bzgl. der Stützstellen $x_i = -2 + i$, $i = 0, \dots, 4$;

b) durch Gauß-Ausgleich in P_2 bzgl. der Stützstellen $x_i = -2 + i/2$, $i = 0, \dots, 8$ („Ausgleichs-
parabel“).

Skizzieren Sie den jeweiligen Funktionsverlauf und vergleichen Sie die Approximationsfehler im Punkt $x = 1/3$. Wie lautet das Ergebnis unter b) für $p_2 \in P_3$? (keine Rechnung!)

Aufgabe 3 *Polynomauswertung mit dem Horner-Schema (3 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas den Wert der Ableitung $f'(2)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{-2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 5x - 1}{-2x^5 + 6x^4 - 10x^2 + 6x - 2}.$$

Aufgabe 4 *Fehlerasymptotik bei Polynominterpolation (4 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf einem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, daß das Restglied $R_n(x)$ bei Lagrange-Interpolation von f über $n + 1$ Stützstellen aus $[a, b]$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Für jedes n können hierbei die Stützstellen in $[a, b]$ beliebig gewählt werden.

Was unterscheidet dieses Beispiel von dem in der Vorlesung angegebenen Beispiel $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, für das die interpolierende Polynomfolge nicht gleichmäßig konvergiert?