

8. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 14.12.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Schlüsse aus der Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms (3 Punkte)*

Von einem Polynom p seien folgende Werte bekannt:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(x_i)$	-5	1	1	1	7	25

Welchen Grad hat p mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms.

Aufgabe 2 *Anwendung der Fehlerabschätzung zur Polynominterpolation (4 Punkte)*

Von der Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \int_0^x \sin^2(t) dt$ soll eine 10-stellige Wertetabelle erstellt werden. Zur Ermittlung eines Näherungswertes für $f(x)$, $x \in [0, \pi]$, wird dann jeweils ein geeignetes kubisches Lagrange-Interpolationspolynom mit Stützpunkten aus dieser Tabelle berechnet und in x ausgewertet.

- Wieviele äquidistante Stützstellen sind notwendig, damit der Interpolationsfehler höchstens $3 \cdot 10^{-9}$ beträgt?
- Ermitteln Sie eine Abschätzung des maximalen Fehlers bei Berechnung von $f(x)$, $x \in [0, \pi]$, aus dieser Tabelle nach dem oben beschriebenen Verfahren unter Berücksichtigung des Rundungsfehlers.

Aufgabe 3 *Eigenschaften der dividierten Differenzen (4 Punkte)*

Gegeben sei $f \in C^{n+1}[a, b]$. Verifizieren Sie folgende Aussagen für die dividierten Differenzen $f[x_0, \dots, x_n]$ von f bzgl. paarweise verschiedener Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$:

- Für beliebige Permutationen x'_0, \dots, x'_n der Stützstellen x_0, \dots, x_n ist $f[x'_0, \dots, x'_n] = f[x_0, \dots, x_n]$.
- Für $f \in P_{n-1}$ ist $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.
- Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ so, daß $f[x_0, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$ gilt.

Aufgabe 4 *Extrapolation (4 Punkte)*

Bestimmen Sie aus den unten angegebenen Funktionsauswertungen von $f(x) = \sinh(x)$ durch Extrapolation eines geeigneten Differenzenquotienten eine möglichst gute Näherungen für $f'(0.4)$.

x	$f(x)$
0.38	0.389211590
0.39	0.399961960
0.40	0.410752326
0.41	0.421583767
0.42	0.432457368