

## 8. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 14.12.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

### Aufgabe 1 *Schlüsse aus der Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms (3 Punkte)*

Von einem Polynom  $p$  seien folgende Werte bekannt:

$x_i$	-2	-1	0	1	2	3
$p(x_i)$	-5	1	1	1	7	25

Welchen Grad hat  $p$  mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms.

### Aufgabe 2 *Anwendung der Fehlerabschätzung zur Polynominterpolation (4 Punkte)*

Von der Funktion  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \int_0^x \sin^2(t) dt$  soll eine 10-stellige Wertetabelle erstellt werden. Zur Ermittlung eines Näherungswertes für  $f(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , wird dann jeweils ein geeignetes kubisches Lagrange-Interpolationspolynom mit Stützpunkten aus dieser Tabelle berechnet und in  $x$  ausgewertet.

- Wieviele äquidistante Stützstellen sind notwendig, damit der Interpolationsfehler höchstens  $3 \cdot 10^{-9}$  beträgt?
- Ermitteln Sie eine Abschätzung des maximalen Fehlers bei Berechnung von  $f(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , aus dieser Tabelle nach dem oben beschriebenen Verfahren unter Berücksichtigung des Rundungsfehlers.

### Aufgabe 3 *Eigenschaften der dividierten Differenzen (4 Punkte)*

Gegeben sei  $f \in C^{n+1}[a, b]$ . Verifizieren Sie folgende Aussagen für die dividierten Differenzen  $f[x_0, \dots, x_n]$  von  $f$  bzgl. paarweise verschiedener Stützstellen  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ :

- Für beliebige Permutationen  $x'_0, \dots, x'_n$  der Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  ist  $f[x'_0, \dots, x'_n] = f[x_0, \dots, x_n]$ .
- Für  $f \in P_{n-1}$  ist  $f[x_0, \dots, x_n] = 0$ .
- Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$  so, daß  $f[x_0, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$  gilt.

### Aufgabe 4 *Extrapolation (4 Punkte)*

Bestimmen Sie aus den unten angegebenen Funktionsauswertungen von  $f(x) = \sinh(x)$  durch Extrapolation eines geeigneten Differenzenquotienten eine möglichst gute Näherungen für  $f'(0.4)$ .

$x$	$f(x)$
0.38	0.389211590
0.39	0.399961960
0.40	0.410752326
0.41	0.421583767
0.42	0.432457368