Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

14.12.2005

9. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 04.01.2006, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Numerischer Aufwand bei Polynominterpolation (4 Punkte)*

Es sei $p \in P_n$ das Lagrangesche Interpolationspolynom zu $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und den zugehörigen Stützwerten $y_0, \dots, y_n$. Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten arithmetischen Operationen zur Berechnung von $p(\xi)$ an einer Stelle ξ

a) bei Verwendung der Lagrangeschen Darstellung von p,

b) bei Verwendung der Newtonschen Darstellung von p,

c) bei Anwendung des Neville-Algorithmus.

Aufgabe 2 *Spline-Interpolation (4 Punkte)*

Es sei S_0 der Raum aller kubischen natürlichen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

a) Welche der folgenden Funktionen sind aus S_0 ?

   i) $f(x) = x^3 - x^2$,

   ii) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$,

   iii) $f(x) = \max\{0, (x-1)^3\} - 1/2x^3$.

b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S_0$ zu $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0), s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 3 *Bestapproximation (4 Punkte)*

Gegeben sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos \pi x$. Berechnen Sie Bestapproximationen im Polynomraum P_2 bzgl. der L^2-Norm (Gauß-Approximation) und bzgl. der Maximumsnorm (Tschebyscheff-Approximation). Vergleichen Sie die L^2-Norm und die Maximumsnorm der Fehler.

Aufgabe 4 *Tschebyscheff Polynome (4 Punkte)*

a) Zeigen Sie die folgende Darstellung der Tschebyscheff-Polynome:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right] , \qquad x \in \mathbb{R} \backslash] - 1, 1[\ .$$

b) Für $a > 3/2$ sei $f_a : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_a(x) = \dfrac{1}{x + a}$.

i) Beweisen Sie, daß die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome $p_n \in P_n$ vom Grad n an f_a in den Nullstellen von T_{n+1} gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen f_a konvergiert.

ii) Gilt dies für jede Wahl von $n + 1$ paarweise verschiedenen Knoten in $[-1, 1]$?

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und
einen guten Rutsch in das neu Jahr!