

10. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 11.01.2006, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 Gauss-Approximation von \sqrt{x} (4 Punkte)

Bestimmen Sie die beste Approximation im Sinne von Gauß an die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, in den Polynomräumen P_0 , P_1 und P_2 .

Aufgabe 2 Tschebyscheff-Approximation von \sqrt{x} (4 Punkte)

Bestimmen Sie die beste Approximation im Sinne der Tschebyscheff-Approximation an die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ in den Polynomräumen P_0 und P_1 .

Hinweis: Versuchen Sie bei der Bestimmung des bestapproximierenden linearen Polynoms $p_1 \in P_1$ den Ansatz, daß die Punkte 0, 1 und ξ mit $0 < \xi < 1$ Alternantenpunkte sind. Bestimmen Sie aus den resultierenden Beziehungen für die Fehlerfunktion die Koeffizienten von p_1 .

Aufgabe 3 Ein Bestapproximationsproblem in $\|\cdot\|_\infty$ (4 Punkte)

Es seien $b > a > 0$ gegeben. Gesucht ist die Größe

$$\min_{\substack{p \in P_n \\ p(0)=1}} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \right\}.$$

- a) Interpretieren Sie die Aufgabe als Bestapproximationsproblem und lösen Sie dieses Problem mit Hilfe des Alternantensatzes.

Hinweis: Die Lösung \bar{p} kann mit Hilfe der auf das Intervall $[a, b]$ transformierten Tschebyscheff-Polynome dargestellt werden.

- b) Berechnen Sie den Wert des Minimums $\max_{a \leq x \leq b} |\bar{p}(x)|$, und beweisen Sie die Abschätzung

$$\max_{a \leq x \leq b} |\bar{p}(x)| \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^n, \quad \kappa = \frac{b}{a} > 1.$$

Aufgabe 4 Numerische Integration (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Näherung für

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

durch numerische Quadratur mit Hilfe der summierten Simpsonregel in einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-5}$. Wieviele Funktionsauswertungen sind erforderlich, um die gleiche Genauigkeit bei Verwendung der summierten Trapezregel garantieren zu können?