Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek 11.01.2006

11. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 18.01.2006, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Summierte Quadraturformeln* *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie eine Näherung für

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

durch numerische Quadratur mit Hilfe der summierten Simpsonregel in einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-5}$. Wieviele Funktionsauswertungen sind erforderlich, um die gleiche Genauigkeit bei Verwendung der summierten Trapezregel garantieren zu können?

Aufgabe 2 *Normalverteilung* *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-t^2/2}\,dt$$

auf vier Nachkommastellen genau mit einer numerischen Methode Ihrer Wahl. Begründen Sie, daß Ihr Ergebnis ausreichend genau ist.

Aufgabe 3 *Eine exotische Quadraturformel* *(4 Punkte)*
Zur numerischen Berechnung von

$$I(f) := \int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

für eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ wird die folgende Formel vorgeschlagen:

$$I_n(f) := \frac{1}{9}\Big(f(-1) + 8f(-1/2) + 8f(1/2) + f(1)\Big)$$

a) Beweisen Sie, daß mit dieser Formel alle Polynome bis zu einem Höchstgrad von 3 exakt integriert werden, d. h., es gilt $I_n(p) = I(p)$ für $p \in P_3$.

b) Folgern Sie für $f \in C^4[-1,1]$ die Fehlerabschätzung

$$|I_n(f) - I(f)| \le \frac{1}{24} \max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(4)}(\xi)| \cdot \int_{-1}^1 \left|\left(x^2-1\right)\left(x^2-1/4\right)\right| dx \le \frac{1}{96} \max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(4)}(\xi)|\ ,$$

indem Sie f durch sein Interpolationspolynom der Ordnung 3 mit Stützstellen $-1, -1/2, 1/2, 1$ erseten und das Integral über den Interpolationsfehler abschätzen.

Aufgabe 4 *Rombergverfahren* *(4 Punkte)*
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x\; dx$$

mit Hilfe des Romberg-Verfahrens zur Schrittweitenfolge $h_i = \frac{\pi}{2}\,2^{-i}$ auf vier Nachkommastellen genau. Kontrollieren Sie den Fehler mit der *a-posteriori*-Fehlerschätzung aus der Vorlesung.