

12. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 25.01.2006, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Gauß-Quadratur stetiger Funktionen* (4 Punkte)

Bestimmen Sie Näherungen für folgende Integrale mit Hilfe einer Gaußschen Quadraturformel, so daß der Quadraturfehler geringer als $1/1000$ ist:

$$\int_0^1 \cosh x \, dx, \quad \int_2^3 \frac{1}{x} \, dx.$$

Aufgabe 2 *Exaktheit von Gaußquadraturen* (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Bestapproximation (Gauß-Approximation) an $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ in P_2 bzgl. des Standardskalarproduktes auf $[0, 1]$. Verwenden Sie dabei **ausschließlich Quadraturformeln**, die die auftretenden Integrale exakt auswerten.

Aufgabe 3 *2-dimensionale Integration* (4 Punkte)

Gegeben sei $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Zur näherungsweisen Berechnung von

$$I(f) = \int_Q f(x, y) \, dx \, dy, \quad f \in C(Q),$$

soll die Quadraturformel

$$I_n(f) = f(-\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + f(\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + f(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) + f(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$$

verwendet werden. Beweisen Sie, daß alle Funktionen der Form $f(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j} x^i y^j$ mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ bei Anwendung dieser Formel exakt integriert werden.

Aufgabe 4 *Tschebyscheffsche Quadraturformeln* (4 Punkte)

Eine Quadraturformel vom Typ

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \sim \int_{-1}^1 f(x) \, dx,$$

bei der alle Gewichte a_i gleich sind, und welche (mindestens) die Ordnung $n + 1$ besitzt, heißt eine *Tschebyscheffsche Formel*. Bestimmen Sie für $n = 1, 2, 3$ die Stützstellen und Gewichte aller Tschebyscheffscher Quadraturformeln. Geben Sie Abschätzungen für die zugehörigen Restglieder an.