Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

25.01.2006

13. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 01.02.2006, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Nullstellenbestimmung mit verschiedenen Verfahren (4 Punkte)*

Approximieren Sie die Nullstelle π der Funktion $f(x) = \sin x$ (Fehler kleiner $5 \cdot 10^{-6}$) mit Hilfe

a) einer Intervallschachtelung mit Startintervall $[2, 4]$;

b) der Fixpunktiteration $x_t = x_{t-1} + f(x_{t-1})$ mit Startwert $x_0 = 4$;

c) des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 4$.

Warum konvergiert in diesem Fall die Fixpunktiteration b) genauso schnell wie das Newton-Verfahren?

Aufgabe 2 *Konvergenzgeschwindigkeit der Fixpunktiteration (4 Punkte)*

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x - \cos x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Beweisen Sie, daß die Gleichung eindeutig lösbar ist, und daß die Lösung im Intervall $[\pi/6, \pi/3]$ liegt.

b) Überführen Sie das Nullstellenproblem in ein Fixpunktproblem und zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf $[\pi/6, \pi/3]$ erfüllt sind. Schätzen Sie a priori ab, wieviele Iterationen notwendig sind, um, ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$, eine Genauigkeit von $1/20$ zu erreichen.

c) Führen Sie fünf Iterationen durch und überprüfen Sie die Genauigkeit Ihrer Approximation mit der a posteriori Fehlerabschätzung.

d) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$, zwei Iterationen mit dem Newton-Verfahren zum Nullstellenproblem durch und vergleichen Sie die Resultate mit denen aus c).

Aufgabe 3 *Vergleich verschiedener Iterationsvorschriften (4 Punkte)*

Beweisen Sie, daß die Gleichung $x + \ln x = 0$ genau eine Lösung z im Intervall $[0.5, 0.6]$ besitzt. Untersuchen Sie, welche der folgenden Iterationsfolgen für geeignete Startwerte gegen z konvergieren.

i) $x_{t+1} = -\ln x_t$,

ii) $x_{t+1} = e^{-x_t}$,

iii) $x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + e^{-x_t}\right)$.

Zusatzaufgabe: Modifizieren Sie die dritte Formel so, daß ein „besseres“ Verfahren entsteht.

Aufgabe 4 *Eine fixpunktfreie Selbstabbildung* *(3 Punkte)*

Es sei $g(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ und $M = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$. Zeigen Sie

i) $g(M) \subset M$

ii) $|g(x) - g(y)| < |x - y| \qquad \forall x, y \in M$

iii) g besitzt <u>keinen</u> Fixpunkt in M

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?