Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

24.10.2005

Präsenzübungen zur Numerik 1

1.) Wann heißt eine Matrix orthogonal, bzw. unitär? Man gebe ein nichttriviales Beispiel einer reellen, orthogonalen 3×3-Matrix an.

2.) Warum besitzen hermitesche Matrizen nur reelle Eigenwerte? Warum stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander?

3.) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

4.) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) konvex? Wie läßt sich das mit Hilfe von Ableitungen charakterisieren?

5.) Besitzen strikt konvexe Funktionen notwendig ein Infimum? (Beweis oder Gegenbeispiel) Falls ja, wird dieses auch angenommen?

6.) Man begründe, daß stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und ihr Maximum annehmen.

7.) Man begründe mit Hilfe der Dreiecksungleichung, daß der Absolutbetrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ist.

8.) Man gebe eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche Hölder-stetig mit Exponent 1/2 ist, jedoch nicht Lipschitz-stetig. Wie lautet ein entsprechendes Beispiel im $\mathbb{R}^3$? Wann heißt eine Abbildung kontrahierend?

9.) Wie lautet die Taylor-Entwicklung (um $x_0 = 0$) der Funktion $f : x \to \sin \pi x$?

10.) Wie lautet die Fourier-Entwicklung der Funktion $f : x \to \sin \pi x$

11.) Eine Folge a_n erfülle die rekursive Beziehung

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad a_0 = a_1 = 1$$

Man mache den Ansatz $a_n = \lambda^n$, bestimme so die möglichen Werte von λ (zwei nichttriviale Lösungen) und man zeige, wie damit a_n in geschlossener Form angegeben werden kann.

12.) Es seien n Vektoren aus $\mathbb{R}^m$ gegeben, $n > m$. Wieviele verschiedene Basen des $\mathbb{R}^m$ lassen sich aus ihnen maximal bilden? In welchem Fall wird die Maximalzahl erreicht?

13.) Unter welchen Bedingungen ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

lösbar? (A nicht notwendig regulär)

14.) Was ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?

15.) Sind auf beliebigen Vektorräumen je zwei Normen äquivalent? Wenn nicht, gibt es eine hinreichende Bedingung?