Prof. Dr. M. Voit WS 2005/06

Stochastik II

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 2. Oktober 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 6

Zeigen Sie für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ und ein $r \in \mathbb{N}$:
Existieren für alle $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|k| := k_1 + \ldots + k_d \leq r$ die Momente

$$M_k := \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \; x_2^{k_2} \ldots \; x_d^{k_d} \; d\mu(x),$$

so ist $\hat{\mu}$ k-mal stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_d}^{k_d}} \; \hat{\mu}(x) = (-i)^{|k|} \int_{\mathbb{R}^d} \; e^{-i<x,y>} \; y_1^{k_1} \ldots y_d^{k_d} \; d\mu(y).$$

Aufgabe 7

Es sei $\mu \in M_b^+(\mathbb{R}^d)$ ein positives beschränktes Maß auf $\mathbb{R}^d$.

a) Man zeige, daß

$$e(\mu)(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, \mu^{(k)}(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

(mit $\mu^{(k)} := \mu * \ldots * \mu$ und $\mu^{(0)} = \delta_0$)
ein positives beschränktes Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $e(\mu)(\mathbb{R}^d) = e^{\mu(\mathbb{R}^d)}$ definiert.

b) Berechnen Sie $\widehat{e(\mu)}$ mit Hilfe von $\hat{\mu}$.

c) Bestimmen Sie für $\lambda \geq 0$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $e^{-\lambda} \cdot e(\lambda \cdot \delta_1)$.

d) Zeigen Sie, daß für $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ die Abbildung $[0, \infty[\to M^1(\mathbb{R}^d)$,
$\lambda \mapsto e^{-\lambda} \cdot e(\lambda \cdot \mu) =: \mu_\lambda$ schwach stetig ist mit $\mu_{\lambda_1} * \mu_{\lambda_2} = \mu_{\lambda_1 + \lambda_2}$ für $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Aufgabe 8

Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger $\mathbb{R}$-wertiger Zufallsvariabler mit Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{R})$ und T eine weitere, von den X_n unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit Verteilung π_λ. Man zeige, daß die Zufallsvariable

$$S(\omega) := \sum_{n=1}^{T(\omega)} X_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

$e^{-\lambda} \cdot e(\lambda \cdot \mu)$-verteilt ist.

Aufgabe 9

Es sei $(X_n)_{n\geq 1} \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E(X_n) = E(X_1)$ $(n \in \mathbb{N})$. Man zeige für eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N}_0$ mit $E(T) < \infty$, die unabhängig von $(X_n)_{n\geq 1}$ ist:

$S : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$ ist eine Zufallsvariable mit $E(S) = E(T) \cdot E(X_1)$.

Aufgabe 10*

Entscheiden Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels oder mittels eines Beweises, ob folgende Aussage korrekt ist:

Ist $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ ein Maß mit Lebesguedichte, so gilt für jede offene Menge $D \subset \mathbb{R}^d : \mu(\overline{D}) = \mu(D)$.