Prof. Dr. M. Voit WS 2005/06

Stochastik II

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 08. November 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 11

Entscheiden Sie durch Beweis bzw. ein Gegenbeispiel, ob folgende Aussagen korrekt sind:

a) Konvergiert $(\mu)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^1(\mathbb{R}^d)$ schwach gegen $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ und ist $T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ **stetig**, so konvergiert $(T(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset M^1(\mathbb{R}^m)$ schwach gegen $T(\mu)$.

b) Konvergiert $(\mu)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^1(\mathbb{R}^d)$ schwach gegen $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ und ist $T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ **Borel-meßbar**, so konvergiert $(T(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset M^1(\mathbb{R}^m)$ schwach gegen $T(\mu)$.

c) Die Faltung $*: M^1(\mathbb{R}^d) \times M^1(\mathbb{R}^d) \to M^1(\mathbb{R})^d, (\mu,\nu) \mapsto \mu \in \nu$ ist schwach stetig, d.h. sind $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^d)$, schwach konvergent gegen μ bzw. $\nu \in M^1(\mathbb{R}^d)$, so konvergiert $(\mu_n * \nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $\mu * \nu$.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{N}_z := \{N(0,\sigma^2) \geq \sigma^2 \geq 0\} \subset M^1(\mathbb{R})$ der zentrierten Normalverteilungen (mit $N(0,0) := \delta_0$) schwach abgeschlossen ist; d.h. dass jeder Limes einer Folge in $\mathcal{N}_z$ wieder in $\mathcal{N}_z$ liegt.
Gilt diese Aussage auch für $\mathcal{N} := \{N(m,\sigma^2) : \sigma^2 \geq 0,\ m \in \mathbb{R}\}$?

Aufgabe 13

a) Es seien X, Y unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable.
Zeigen Sie, dass
$(*)\quad \widehat{P_{(X,Y)}}\,(x,y) = \widehat{P_X}(x) \cdot \widehat{P_Y}(y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$ gilt.

b) Entscheiden Sie, ob aus der Gültigkeit der Gleichung $(*)$ bereits folgt, dass die $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen X, Y unabhängig sind.

Aufgabe 14

Sind $U_1, \ldots, U_k$ unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable, so ist $\sum\limits_{j=1}^{k} U_j^2$ χ_k^2-verteilt. Die Lebesgue-Dichte der χ_k^2-Verteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}\ x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{x^2}{2}}\ 1_{[0,\infty[}\ (x).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei Z_k eine reellwertige, χ_k^2-verteilte Zufallsvariable.

a) Bestimmen Sie $E(Z_k)$ und $Var(Z_k)$.

b) Zeigen Sie, daß die Zufallsvariablen $\frac{Z_k - E(Z_k)}{\sqrt{Var(Z_k)}}$ in Verteilung gegen eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable konvergieren.

Scheinkriterien: Mündliche Prüfung oder Semesterklausur zum Semesterende (abhängig von Teilnehmerzahl).

Voraussetzung zur Zulassung: Lösung von ca. 30% der Übungen!