

## Stochastik II

### Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 15. November 2005, 10.00 in die Briefkästen  
im Mathefoyer

#### Aufgabe 15 Dichten d-dimensionaler Normalverteilungen

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine invertierbare Matrix,  $\Sigma := AA^T$  und  $m \in \mathbb{R}^d$  ein Spaltenvektor. Die d-dimensionale Normalverteilung  $N_d(m, \Sigma)$  ist definiert als Bild der d-dim. Standardnormalverteilung  $N_d(0, I_d)$  unter der Abbildung  $Lx := m + Ax$ . Zeigen Sie, dass  $N_d(m, \Sigma)$  die folgende Lebesgue-Dichte hat:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\det A|} e^{-(x-m)^T (AA^T)^{-1} (x-m)/2}.$$

**Anleitung: Transformationssatz.**

#### Aufgabe 16

Es seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängige,  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable mit den Verteilungen

$$P_{X_n} = p_n \delta_0 + (1 - p_n) \delta_1$$

für  $p_n \in ]0, 1[$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Es gelte  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1 - p_n) = \infty$ .

Zeigen Sie, dass für  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  der zentrale Grenzwertsatz gilt.

Gilt der zentrale Grenzwertsatz auch ohne diese Summenbedingung?

#### Aufgabe 17

Für  $p \in ]0, 1[$  und  $n \in \mathbb{N}$  betrachte man die Verteilungsfunktion  $F_{n,p}$  der Zufallsvariablen  $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} (S_n - np)$  für eine  $B_{n,p}$ -verteilte Zufallsvariable  $S_n$ .

a) Bestimmen Sie eine Konstante  $C = C(p)$ , so dass

$$\|F_{n,p} - \Phi\|_{\infty} \leq C/\sqrt{n}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dabei ist  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $N(0, 1)$ .

b) Zeigen Sie für die Binomialverteilungen  $B_{n,1/2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4\pi n} B_{2n,1/2}(\{n\}) = 2.$$

(Tipp: Stirling-Formel!)  
Folgern Sie hieraus, dass

$$\|F_{2n,1/2} - \Phi\|_{\infty} \geq \tilde{c}/\sqrt{n}$$

für eine Konstante  $\tilde{c} > 0$ .

### Aufgabe 18

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so dass für jedes  $\omega \in \Omega$   $X(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$  existiert.

Zeigen Sie, dass  $X$  ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

(Tipp:  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  wird von den offenen Mengen erzeugt!).