Prof. Dr. M. Voit WS 2005/06

Stochastik II

Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag, 22. November 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 19

a) Es sei μ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[-1, 1]$. Bestimmen Sie $\mu * \mu$, $\hat{\mu}$ und $(\mu * \mu)^\wedge$.

b) Zeigen Sie für $T > 0$, dass $f_T(x) := \frac{1-\cos(Tx)}{\pi T x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist mit

$$\hat{f}_T(x) = \begin{cases} 1 - |x|/T & , |x| \leq T \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Tipp: Inversionssatz.

Aufgabe 20

Ein Würfel wird 600-mal unabhängig geworfen. Dabei werden Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ mit folgenden Häufigkeiten gewürfelt: $80, 112, 108, 94, 99, 107$. Entscheiden Sie mit dem χ^2-Test zum Niveau $\alpha = 0,05$, ob man die Hypothese eines fairen Würfels verwerfen muß.

Aufgabe 21

Es seien I eine Indexmenge, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Meßräumen, und $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$.
Zeigen Sie:

a) Die Menge der Zylindermengen in Ω bildet eine Algebra;

b) Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, so dass für jedes $i \in I$ die Projektion $p_i : \Omega \to \Omega_i$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-meßbar ist.

c) Ist $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ ein weiterer Meßraum, und sind $X_i : \tilde{\Omega} \to \Omega_i$ Abbildungen $(i \in I)$, so sind die X_i $(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_i)$-meßbar für alle $i \in I$ genau dann, wenn die Abbildung $X : \tilde{\Omega} \to \Omega$ mit $X(\omega) := (X_i(\omega))_{i \in I}$ $(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$-meßbar ist.

Aufgabe 22

a) Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable X sei $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt.
Bestimmen Sie $E(X^4)$.

b) Für eine $\mathbb{R}^d$-wertige standardnormalverteilte Zufallsvariable X berechne man $E(\|X\|_2^4)$.

Aufgabe 23

Zeigen Sie, dass $N(0,1)$ nicht von der Form $e^{-\lambda} e(\lambda \cdot \mu)$ für ein $\lambda > 0$ und $\mu \in M^1(\mathbb{R})$ ist in der Notation von Aufgabe 7.
Tipp: Fouriertransformation!