Stochastik II

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 29. November 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 24

Es seien I eine Indexmenge und $(\nu_t)_{t\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und verschiedene $t_1, \ldots, t_n \in I$ die Produktmaße

$$\mu_{\{t_1,\ldots,t_n\}} := \nu_{t_1} \otimes \ldots \otimes \nu_{t_n}$$

ein projektives System von Wahrscheinlichkeitsmaßen bilden.

Aufgabe 25 Verzweigungsprozesse und Aussterbewahrscheinlichkeiten

Es sei $(Z_{n,j})_{n,j\geq 1}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter $\mathbb{N}_0$-wertiger Zufallsvariablen mit Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$ und $N \in \mathbb{N}$.

a) Überlegen Sie sich, dass die rekursiv definierte Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsvariablen mit $X_0 := N$ und

$$X_{n+1} := \sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j} \quad (n \geq 0)$$

als Modell für ein (unbegrenztes) Zellwachstum dient mit N Zellen zur Zeit 0, wobei sich zu jeder Zeit eine existierende Zelle gemäß der Verteilung μ teilt, und dies unabhängig von der Vergangenheit der Zelle und den anderen vorkommenden Zellen geschieht.
(Dabei stirbt die Zelle ohne Nachkommen mit Wahrscheinlichkeit $\mu(\{0\})$.)

b) Bestimmen Sie $E(X_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ mithilfe von $E(Z_{1,1}) < \infty$.
(Hinweis: Aufgabe 9!)

c) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion $g_{X_n}(z) := E(z^{X_n})$ für $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, n \geq 0$ mithilfe der Erzeugendenfunktion $g(z) := E(z^{Z_{1,1}})$ von $Z_{1,1}$

Sei ab jetzt $N = 1$.

d) Zeigen Sie, dass $P(X_{n+1} = 0) = g(P(X_n = 0))$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

e) Zeigen Sie, dass für das Ereignis $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\}$ die Gleichung $P(E) = g(P(E))$ gilt.

f) Bestimmen Sie $P(E)$ für $\mu = \frac{1}{4}\,\delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2$.

Aufgabe 26

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bestimme man ein $\mu \in M^1(\mathbb{N})$ und einen Markov Kern K auf $\mathbb{N}$ mit $\mu \otimes K = P$.
Sind dabei μ und K durch P eindeutig bestimmt?

Aufgabe 27 Translationsinvariante Kerne

a) Es sei $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass

$$K_\mu(x, A) := (\delta_x * \mu)(A) = \mu(A - x) \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

einen Markov-Kern auf $\mathbb{R}^d$ bildet mit der Eigenschaft

$$K_\mu(x, A) = K_\mu(0, A - x) \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Kerne mit dieser Eigenschaft heißen **translationsinvariant.**

b) Zeigen Sie, dass jeder translationsinvariante Markov-Kern K auf $\mathbb{R}^d$ die Form $K = K_\mu$ für ein $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ hat.

c) Zeigen Sie $K_{\mu_1} \circ K_{\mu_2} = K_{\mu_1 * \mu_2}$ $(\mu_1, \mu_2 \in M^1(\mathbb{R}^d))$.

d) Zeigen Sie, dass für unabhängige $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable X, Y die Gleichung $P_{(X,X+Y)} = P_X \otimes K_{P_Y}$ gilt.

Aufgabe 28

In einer Petrischale befinden sich 10^3 Bakterien eines bestimmten Typs zur Zeit 0. In jeder Minute geschieht folgendes mit einem vorhandenen Bakterium mit jeweils der Wahrscheinlichkeit 1/3 :
- Das Bakterium stirbt ohne Nachkommen.
- Das Bakterium überlebt (ohne Nachkommen).
- Das Bakterium überlebt und hat 2 Nachkommen.

Diese Vorgänge laufen unabhängig für alle vorhandenen Bakterien ab und unabhängig von der Vergangenheit der Bakterien.
Beschreiben Sie die zeitliche Entwicklung der Bakterienzahlen durch einen passenden stochastischen Prozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$.
Wie hängt dieser Prozeß mit der Situation in Aufgabe 25 zusammen?