# Stochastik II

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 06. Dezember 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

## Aufgabe 29 Endlich-dimensionale Verteilungen zeitdiskreter Prozesse

Auf einem Meßraum $(E, \mathcal{B})$ seien gegeben:

a) Eine Startverteilung $\mu \in M^1(E, \mathcal{B})$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$, Markov-Kerne $K_n$ von $(E^n, \mathcal{B}^{\otimes, n})$ nach $(E, \mathcal{B})$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq J \subset \{0, \dots, n\}$ sei $p_J^{\{0,\dots,n\}} : E^{\{0,\dots,n\}} \to E^J$ die kanonische Projektion.
Zeigen Sie:

i ) Das Maß $\mu_J := p_J^{\{0,\dots,n\}}((\dots((\mu \otimes K_1) \otimes K_2) \dots) \otimes K_n)$ hängt nur von $J$ und nicht von $n$ ab.

ii) Die Maße $(\mu_J)_{\emptyset \neq J \subset \mathbb{N}_0 \text{ endlich}}$ bilden ein projektives System von W'maßen.

## Aufgabe 30 Markov-Kerne und die Exponentialfunktion

a) Für einen Markov-Kern $K$ auf dem Meßraum $(E, \mathcal{B})$ zeige man:
Für jedes $t \geq 0$ definiert

$$K_t(\omega, A) := e^{-t} \cdot exp(K_t)(\omega, A) := e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} K^{(k)}(\omega, A) \quad (\omega \in E, A \in \mathcal{B})$$

einen Markov-Kern $K_t$ auf $(E, \mathcal{B})$ mit $K_s \circ K_t = K_{s+t}$ für $s, t \geq 0$.
(Beachte: $K^{(k)}$ bezeichnet die $k$-te Potenz beim Hintereinanderschalten von Kernen, und $K^{(0)}$ ist definitionsgemäß der Einheitskern).

b) Bestimmen Sie für $|E| < \infty$ die zu $K_t$ gehörende stochastische Matrix aus der zu $K$ gehörenden stochastischen Matrix.

c) Ist $E = \mathbb{R}^d$ und $K = K_\mu$ der zu $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ gehörende translationsinvariante Kern, so zeige man, dass auch $K_t$ für $t \geq 0$ translationsinvariant ist.
Welches Maß $\mu_t \in M^1(\mathbb{R}^d)$ gehört zu $K_t$?

**Aufgabe 31**

Bestimmen Sie auf dem Grundwahrscheinlichkeitsraum
$(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ zwei $\{0,1\}$-wertige stochastische Prozesse, die nicht ununterscheidbar, aber Modifikationen sind.

**Aufgabe 32**

Es sei $f : [0,\infty[ \to [0,\infty[$ monoton wachsend.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{f} : [0,\infty[ \to [0,\infty[, \quad \tilde{f}(t) := inf\{f(s) : s > t\}$$

monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist, und dass für jedes $t > 0$ der linksseitige Limes $\lim\limits_{s \uparrow t} \tilde{f}(s)$ existiert.