Stochastik II

Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag, 06. Dezember 2005, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 33

Es sei $\mu \in M^1(\mathbb{R})$ ein W'maß, das kein Punktmaß ist.
E sei $(X_t)_{t\in[0,1]}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozeß auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den endlich-dimensionalen Verteilungen

$$P_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})} = \mu \otimes \dots \otimes \mu \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le 1).$$

Zeigen Sie, dass ein solcher Prozeß keine Modifikation besitzt mit fast sicher rechtsstetigen Pfaden.

Aufgabe 34 Eigenschaften von Poisson-Prozessen

Für einen normalen Poisson-Prozeß zeige man:

a) Für jedes $t \ge 0$ gilt $P(s \mapsto X_s$ ist stetig in $t) = 1$.

b) Die Wartezeit $W := inf\{t \ge 0 : X_t = 1\}$ auf den ersten Sprung ist exponentialverteilt. Bestimmen Sie den Parameter dieser Verteilung!

Aufgabe 35

Es sei $(\mu_t)_{t\ge 0} \subset M^1(\mathbb{R})$ eine Faltungshalbgruppe von **symmetrischen** Wahrscheinlichkeitsmaßen, d.h. für die Spiegelung $s(x) = -x$ auf $\mathbb{R}$ und $t \ge 0$ gilt $s(\mu_t) = \mu_t$.

a) Zeigen Sie für die zu $(\mu_t)_{t\ge 0}$ gehörende Halbgruppe $(K_t)_{t\ge 0}$ von translationsinvarianten Markov-Kernen auf $\mathbb{R}$, dass

$$K_t^s(x, A) := \frac{1}{2}(K_t(x, A) + K_t(-x, A))$$

$(t \ge 0,\ x \in [0, \infty[,\ A \in \mathcal{B}([0, \infty[))$
eine Halbgruppe $(K_t^s)_{t\ge 0}$ von Markov-Kernen auf $[0, \infty[$ definiert.
- Sind die K_t^s translationsinvariant?
- Ist $(K_t^s)_{t\ge 0}$ auch eine Halbgruppe für nicht-symmetrische Maße μ_t?

b) Nun sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine normale Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$ zur Faltungsgruppe $(\mu_t := N(0,t))_{t\geq 0}$.
Zeigen Sie, dass $(|B_t|)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozeß auf $[0,\infty[$ zur Halbgruppe $(K_t^s)_{t\geq 0}$ wie in a) ist.

Aufgabe 36

Sei $(\mu_t)_{t\geq 0} \subset M^1(\mathbb{R}^2)$ eine Faltungshalbgruppe rotationssymmetrischer Wahrscheinlilchkeitsmaße, d.h. jede Drehung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $t \geq 0$ gilt $s(\mu_t) = \mu_t$.

a) Zeigen Sie für die zu $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gehörende Halbguppe $(K_t)_{t\geq 0}$ von translationsinvarianten Kernen auf $\mathbb{R}^2$, dass

$$K_t^s(r,A) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_t\left(\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r sin \varphi\end{pmatrix}, A\right)\, d\varphi$$

(t $\geq 0,\ r \in [o,\infty[,\ A \in \mathcal{B}([0,\infty[)$)
eine Halbgruppe von Markov-Kernen auf $[0,\infty[$ definiert.

b) Nun sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine normale Bronwsche Bewegung auf R^2 zur Faltungshalbgruppe $(\mu_t := N(0,t))_{t\geq 0}$.
Zeigen Sie, dass $(\|B_t\|_2)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozeß auf $[o,\infty[$ zur Halbgruppe $(K_t^s)_{t\geq 0}$ wie in a) ist.

Anmerkung: Mit obigem Prinzip lassen sich zu jeder Dimension $d \in \mathbb{N}$ aus d-dimensionalen Brownschen Bewegungen sogenannte Bessel-Prozesse auf $[0,\infty[$ konstruieren. Solche Prozesse werden z.B. bei der Modellierung von Zinsen verwendet.