Stochastik II

Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag, 03. Januar 2006, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 37

Für eine 1-dimensionale normale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ zeige man, dass die Prozesse $(B_t)_{t\in[0,1]}$ und $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ äquivalent sind. Interpretieren Sie das Resultat!

Aufgabe 38

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $(X_t := B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ die assoziierte Brownsche Brücke.
Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in[0,1]}$ und $(X_{1-t})_{t\in[0,1]}$ äquivalente Prozesse sind.

Aufgabe 39

Zeigen Sie, dass für $\mu \in M^1(\mathbb{R})$ die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ eine Autokovarianzfunktion ist.
Welches μ gehört zu $\hat{\mu}(x) = e^{-|x|}$?

Aufgabe 40

Entscheiden Sie in folgenden Fällen für $\mu, \nu \in M^1(\mathbb{R})$, ob $\nu \ll \mu$ gilt:

a) $\nu = N(0,1)$, $\mu = \lambda$ (= Lebesguemaß)

b) $\nu = N(0,1)$, $\mu = \chi_1^2$

c) $\mu = \chi_1^2$, $\nu = N(0,1)$

d) $\nu = B_{100,1/2}$, $\mu = \pi_1$

e) $\nu = \pi_1$, $\mu = N(0,1)$

f) $\nu = \pi_1$, $\mu = \frac{1}{2}(N(0,1) + \pi_1)$

g) $\nu = N(0,1)$, $\mu = \frac{1}{2}(N(0,1) + \pi_1)$.

Aufgabe 41

Für $P, Q \in M^1(\mathbb{R})$ mit Lebesguedichten f_P und f_Q charakterisiere man $P \ll Q$ durch eine Beziehung zwischen f_P und f_Q. Im Falle von $P \ll Q$ bestimmen man eine Dichte von P bzgl. Q.

Aufgabe 42 Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

Für $t \geq 0$ betrachte man die Markov-Kerne

$$K_t(x, A) := N(e^{-t}x,\ 1 - e^{-2t})\ (A) \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

auf $\mathbb{R}$.
(Physikalische Deutung: Hat ein Teilchen zur Zeit 0 die Geschwindigkeit $x \in \mathbb{R}$, so hat es zur Zeit t eine mittlere Geschwindigkeit $e^{-t}x$ bei „exponentieller Dämpfung“ mit der Varianz $1 - e^{-2t}$).
Zeigen Sie:

a) $(K_t)_{t\geq 0}$ ist eine Halbgruppe von Markov-Kernen.

b) Bestimmen Sie den (eindeutigen) Parameter $\sigma^2 \geq 0$, so dass bei der Startverteilung $\nu = N(0, \sigma^2)$ ein zu $(K_t)_{t\geq 0}$ gehörender Markov-Prozeß stationär ist, d.h. dass für alle $s \geq 0$ die Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ äquivalent sind.

c) Für jedes $\sigma^2 \geq 0$ hat ein zur Startverteilung $N(0, \sigma^2)$ und zur Halbgruppe $(K_t)_{t\geq 0}$ gehörender Markov-Prozeß eine Modifikation mit stetigen Pfaden. Ein solcher Prozeß heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

d) Für eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ ist

$$X_t(\omega) := e^{-t}\ B_{e^{2t}}(\omega) \quad (\omega \in \Omega, t \geq 0)$$

ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Weihnachtsferien und einen guten Rutsch ins neue Jahr!