Prof. Dr. M. Voit WS 2005/06

Stochastik II

Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag, 10. Januar 2006, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 43

Es seien $a, r, s \in \mathbb{N}$. Eine Urne enthalte anfangs r rote und s schwarze Kugeln. In jedem Schritt wird zufällig eine Kugel der Urne (unabhängig von den vorigen Ziehungen) entnommen und durch a Kugeln der gleichen Farbe ersetzt. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei T_n der Anteil der schwarzen Kugeln in der Urne nach der $n-$ten Ziehung; insbesondere ist $T_0 = s/(r+s)$.
Man zeige für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$E(T_{n+1}|T_0, T_1, \ldots, T_n) = T_n \quad f.s. \, .$$

Aufgabe 44

Der Zeitpunkt T des Zerfalls eines radioaktiven Teilchens sei exponentialverteilt mit Paramter $\vartheta > 0$; er wird mit einem Geigerzähler beobachtet.
Da der Zähler nur bis zur festen Zeit $t > 0$ im Betrieb ist, mißt man nur $Y := T \wedge t$.
Zeigen Sie, dass

$$E(T|Y) = T \cdot 1_{\{T \leq t\}} + (t + \frac{1}{\vartheta}) \cdot 1_{\{T > t\}} \quad f.s.$$

gilt und interpretieren Sie das Resultat.

Aufgabe 45

Es seien $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable.

a) Mithilfe der Interpretation von $E(X|X+Y)$ **errate** man eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$E(X|X+Y) = F(Y) \quad f.s. \, .$$

Beweisen Sie dann die Formel formal!

b) Bestimmen Sie für beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$

$$E(X|X + c \cdot Y)$$

analog zu a).

Aufgabe 46

Es seien X, Y $\mathbb{R}-$wertige, zentrierte, gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable mit $Var(Y) > 0$.
Man bestimme $\quad E(X|Y)$:

a) mittels einer Darstellung von X als

$$X = (X - cY) + cY,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so zu wählen ist, dass $X - cY$ und Y unabhängig sind

b) im Falle der Invertierbarkeit der Kovarianzmatrix von (X, Y) mit Rechenregel 5.6.(3) aus der Vorlesung.

Aufgabe 47

Es seien X, Y wie in Aufgabe 46.
Bestimmen Sie einen Markov-Kern K von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$P_{(Y,X)} = P_Y \otimes K.$$

Hinweis: Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ muß $K(Y, A) = E(1_A(X)|Y)$ gelten; letzteres kann mit Satz 5.9 der Vorlesung berechnet werden!

Aufgabe 48

Zeigen Sie für $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X \geq 0$ und eine Unter $\sigma-$Algebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, dass $E(X|\mathcal{F}) \geq 0$ gilt.