Prof. Dr. M. Voit WS 2005/06

Stochastik II

Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag, 17. Januar 2006, 10.00 in die Briefkästen im Mathefoyer

Aufgabe 49

Zeigen Sie für eine normale 1-dimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ mit ihrer kanonischen Filtrierung, dass $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 50 Populationsprozesse und Martingale

Es seien $(X_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte $\mathbb{N}_0-$wertige Zufallsvariable mit $z := E(X_{1,1}) \in]0,\infty[$. Betrachte folgende rekursiv definierten Zufallsvariablen $Z_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$:

$$Z_0 := 1, \quad Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

a) Überlegen Sie sich, dass $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein Markov-Prozeß ist, und bestimmen Sie den assoziierten Markov-Kern, der die Übergangswahrscheinlichkeiten beschreibt, mithilfe der Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$ der $X_{n,k}$.

b) Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{z^n}\, Z_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtrierung ist.

Aufgabe 51 Änderung der Filtrierung

Es seien $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ und $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geq 0}$ Filtrierungen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega.\mathcal{A}, P)$, und es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}-$Martingal, das $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geq 0}-$adaptiert ist. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathcal{F}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ impliziert, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ ein $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geq 0}-$Martingal ist.

b) $\tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ impliziert, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ ein $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geq 0}-$Martingal ist.

Aufgabe 52 Das Cox-Rubinstein-Modell zur Modellierung von Aktienkursen

Es seien $0 < d < 1 < u \in \mathbb{R}$ und $p \in]0,1[$ fixiert.
Sei $(X_k)_{k=1,\ldots,N}$ eine Folge unabhängiger, $(p\delta_u + (1-p)\delta_d)$ - verteilter Zufallsvariabler. Dann modelliert der Prozeß $(Y_l := \prod_{k=1}^{l} X_k)_{l=0,\ldots,N}$ die Preisentwicklung einer Aktie im Zeitbereich $\{0, 1 \ldots, N\}$ mit deterministischem Startpreis 1. Betimmen Sie p in Abhängigkeit von u, d, so dass $(Y_l)_{l=0,\ldots,N}$ ein Martingal wird.

Aufgabe 53* Die Brownsche Brücke als bedingte Brownsche Brücke

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine normale Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n < 1$ ist dann $P_{(B_1, B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$ normaverteilt mit bekannter Kovarianzmatrix $\tilde{\Sigma}$.
Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 46, dass

$$P_{(B_1, B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})} = N(0,1) \otimes K$$

für einen Markovkern K von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ gilt, wobei K die Form

$$K(X, dy_1, \ldots, dy_n) = dN(m(x), \Sigma(x))(y_1, \ldots, y_n)$$

hat für passende m und Σ. Bestimmen Sie m und Σ und schließen Sie informell daraus, dass $(B_t)_{t\in[0,1]}$ unter der Bedingung $B_1 = 0$ dieselben endlich-dimensionalen Verteiligungen wie eine Brownsche Brücke hat.