Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 1

Abgabe: Montag, 24.10.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 1: (Peanokurve)
Sei $f : I\!R \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit Periode 2, d.h. $f(x+2) = f(x)$ für alle $x \in I\!R$.
Es gelte $f(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1/3$ und $f(x) = 1$ für $2/3 \leq x \leq 1$.
Definiere folg. Abbildung $\gamma : [0,1] \to [0,1] \times [0,1] \subset I\!R^2$

$$\gamma(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} f(3^{2j-1}x),\ \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} f(3^{2j}x) \right)$$

Zeigen Sie:

(a) γ ist stetig. (Benutzen Sie bekannte Sätze aus der Analysis.)

(b) γ ist surjektiv. (Betrachte nur x der Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} a_i$ mit $a_i \in \{0,2\}$.)

(c) γ ist nicht injektiv.

Aufgabe 2: (Zariski Topologie)
Definiere eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von $I\!R$ durch: $O \in \mathcal{T}$ genau dann wenn $O = \emptyset$ oder wenn $I\!R \setminus O$ endlich ist. Zeigen Sie:

(a) $(I\!R, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

(b) Zwei nichtleere offenen Mengen schneiden sich.

(c) Sei $\widetilde{\mathcal{T}}$ die Standard Topologie auf $I\!R$. Welche der folg. Funktionen sind stetig?
(i): $id : (I\!R, \mathcal{T}) \to (I\!R, \widetilde{\mathcal{T}}), \quad id(x) = x$
(ii): $id : (I\!R, \widetilde{\mathcal{T}}) \to (I\!R, \mathcal{T}), \quad id(x) = x$
(iii): $f : (I\!R, \mathcal{T}) \to (I\!R, \mathcal{T}), \quad f(x) = \sin(x)$
(iv): $g : (I\!R, \mathcal{T}) \to (I\!R, \mathcal{T}), \quad g(x) = x^3 + x - 1$

Aufgabe 3: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folg. drei Aussagen:

(a) $O \in \mathcal{T}$,

(b) O ist Umgebung für alle $x \in O$,

(**(c)** Zu jedem $x \in O$ gibt es eine Umgebung U von x mit $U \subset O$.

Aufgabe 4: Sei X eine Menge und sei $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Abbildung mit
(i) $d(x,y) = 0$ genau dann wenn $x = y$,
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass die folg. Mengen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X definieren: $O \in \mathcal{T}$ genau dann wenn $\forall_{x \in O}\ \exists_{\epsilon > 0}$ sodass $K_\epsilon(x) := \{y \in X | d(x,y) < \epsilon\} \subset O$.

(b) Die Abbildung d erfülle zusätzlich die Dreiecksungleichung (d ist eine Metrik):

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ x, y, z \in X$$

Zeigen Sie, dass $K_\epsilon(x)$ offen ist in der obigen Topologie $\mathcal{T}$.

(c) Sei d eine Metrik. Für welche Funktionen $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist $f(d)$ auch eine Metrik. Zeigen Sie, dass $f(t) = t/(1+t)$ und $f(t) = \min(1,t)$ die gefundenen Bedingungen erfüllen.