Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 2

Abgabe: Montag, 31.10.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 5:
Sei $X = \{p : [0,1] \to I\!R \mid p$ ist ein Polynom $\}$ und $X_0 = \{p \in X \mid p(0) = 0\}$. Die Topologie auf den Vektorräumen X, X_0 sei durch die Norm $||p|| := \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$ gegeben. Zeigen Sie das die lineare Abbildung

$$f : X_0 \to X, \quad f(p)(x) = p'(x) \text{ (=Ableitung von } p(x))$$

bijektiv ist. Ist f bzw. f^{-1} stetig ?

Aufgabe 6:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und sei $A \subset X$ eine nicht abzählbare Menge. Zeige, dass dann A einen Häufungspunkt enthält.

Aufgabe 7: Seien X, Y topologische Räume und seien $X_1, X_2 ... X_n$ Teilmengen von X mit $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung so dass alle Einschränkungen $f|_{X_i} \to Y$ stetig sind. Zeige
(a) Sind alle X_i offen oder alle abgeschlossen, dann ist f stetig.
(b) Gilt (a) auch für nicht endliche Indexmengen?
(c) Finden Sie ein Beispiel, dass im allgemeinen f nicht stetig sein muss.

Aufgabe 8: Zeigen oder widerlegen Sie:
$f : [0,1) \to \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ ist ein Homöomophismus, wobei die Bildmenge und die Urbildmenge mit der entsprechenden Unterraumtopologie versehen sind?

Aufgabe 9: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
(a) Zeigen Sie, dass das Innere $\mathring{Y}$ einer Menge $Y \subset X$ die grösste offene Menge in Y ist und dass $\mathring{Y} = \bigcup\limits_{O \subset Y, O \in \mathcal{T}} O$.
(b) Wie lautet die analoge Aussage für den Abschluss $\overline{Y}$?
(c) Zeigen Sie: $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung $f : I\!R^2 \to I\!R$, $f(x,y) = x$ stetig, aber nicht abgeschlossen ist.