Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 3

Abgabe: Montag, 07.11.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 11:
Seien X_i, $i \in I$ topologische Räume und sei $X = \prod_{i \in I} X_i = \{\phi : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid \phi(i) \in X_i\}$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass eine Folge $\phi_n \in X$ genau dann gegen $\phi \in X$ konvergiert, wenn für alle $i \in I$, $\phi_n(i)$ in X_i gegen $\phi(i)$ konvergiert.
(Man sagt: X trägt die Topologie der punktweisen Konvergenz.)

Aufgabe 12:
(a) Seinen $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume und sei $X = X_1 \times X_2$. Zeigen Sie, dass

$$d : X \times X \to [0, \infty), \quad d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

eine Metrik auf X definiert und dass die dadurch auf X erzeugte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

(b) Seien (X_i, d_i), $i \in \mathbf{N}$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass auf $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min\{d_i(x_i, y_i), 1\}, \qquad x = (x_i) \in X,\ y = (y_i) \in X$$

eine Metrik definiert. Stimmt die metrische Topologie auf X mit der Produkttopologie überein ?

Aufgabe 13:
Auf der Menge $X = [0, 1]^2 \subset I\!\!R^2$ sei eine Äquivalenzrelation mit folg. Äquivalenzklassen definiert:
$[x] = \{x\}$ wenn $0 < x_1 < 1$, $[(0, x_2)] = \{(0, x_2), (1, 1 - x_2)\}$, $[(1, x_2)] = \{(1, x_2), (0, 1 - x_2)\}$.

(a) Was ist der Qutientenraum $Y = X/\!\sim$ anschaulich? Finden Sie eine explizite Einbettung von Y in den $I\!\!R^3$.

(b) Definiere folg. Unterraum Z von Y: $Z = Y \setminus \{[x] \mid x_2 = 1/2\}$. Finden Sie eine weitere Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf X sodass Z homöomorph zu $X/\!\sim_2$ ist.
(Zur Veranschaulichung können Sie Schere, Papier und evtl. Klebstoff benutzen.)