Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 4

Abgabe: Montag, 14.11.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 14:

Seien X, Y disjunkte topologische Räume und seinen $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ feste Punkte. Definiere auf $X \cup Y$ folg. Äquivalenzrelation:

$x \sim y$ genau dann wenn $x = y$ oder $(x = x_0$ und $y = y_0)$ oder $(x = y_0$ und $y = x_0)$.

Der Raum $X \vee Y := (X \cup Y)/\sim$ heisst Einpunktvereinigung oder wedge - Produkt.

(a) Zeige, dass dieser Raum homöomorph zu $\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$ ist.

(b) Das sog. smash-Produkt ist definiert als $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$. Zeigen Sie, dass $S^1 \wedge S^1$ homöomorph zu S^2 ist.

Aufgabe 15:

Seien X und Y topologische Räume und sei $Z(X) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von X. Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zeige dass

(a) $Z(f(X)) \leq Z(X)$

(b) $Z(X) = Z(Y)$, falls f ein Homöomorphismus ist, d.h.. $Z(X)$ ist eine topologische Invariante.

Aufgabe 16:

Zeigen Sie, dass die einzigen zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ die offenen, abgeschlossenen, bzw. halboffenen Intervalle sind. (Intervalle können auch unbeschränkt sein.)

Aufgabe 17:

(a) Zeige, dass in einem Hausdorffraum die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind.

(b) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und sei $X/\sim$ ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass alle Äquivalenzklassen abgeschlossen sind.

(c) Zeige, dass die cofinite Topologie auf $\mathbb{R}$ keinen Hausdorffraum definiert.