Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 5

Abgabe: Montag, 21.11.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 18:

Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann Hausdorffraum ist, wenn die Diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 19:

Sei $\mathcal{T} = \{(r,\infty) \subset \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist in der Topologie $\mathcal{T}$ genau dann wenn $\inf K \in K$.

(c) Sei X ein kompakter Raum und sei $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ stetig (f heisst dann unterhalbstetig). Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in X$ gibt mit $f(x_0) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

Aufgabe 20:

Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $X = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ eine offene Überdeckung durch offene Mengen O_i. Zeigen Sie die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in X$ liegt die δ-Kugel um x ganz in einer der Mengen O_i.

Hinweis:
1. Schritt: Zeige, dass man I durch eine endliche Menge ersetzen kann.
2. Schritt: Zeige, dass $f_i(x) = \inf\limits_{y \notin O_i} d(x,y)$ stetig ist.
3. Schritt: Zeige, dass $\delta := \min\limits_{i \in I} f_i(x)$ die gefordeteten Eigenschaften hat.

Aufgabe 21:

Zeige, dass die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur n-dimensionalen Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Hinweis:

Definiere $N = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x_1, ..., x_n)/(1 - x_{n+1})$. Setze f dann stetig fort.