Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 6

Abgabe: Montag, 28.11.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 22:
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass die Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$ stetig ist.

(b) Sei $A \subset X$. Zeigen Sie, dass $\widetilde{d}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ stetig in x ist.

Aufgabe 23:
Sei X ein topologischer Raum mit diskreter Topologie, d.h. jede Teilmenge ist offen.
Bestimmen Sie alle kompakten Mengen K in X.
Ist K dann auch folgenkompakt ?

Aufgabe 23:
Sei X die Menge aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$d((x_n), (y_n)) := \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n - y_n|$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Ist X kompakt?

Aufgabe 24:
Seien X_i, $i \in \mathbf{N}$ abzählbar viele folgenkompakte Räume. Zeigen Sie, dass dann auch ihr Produkt folgenkompakt ist.
Hinweis: Diagonalverfahren

Aufgabe 25:
Sei X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to [-1, 1] \setminus \{a\}$ stetig, wobei $a \in [-1, 1]$.
Gilt der Fortsetzungssatz von Tietze auch noch in diesem Fall, d.h. existiert eine stetige Fortsetzung $F : X \to [-1, 1] \setminus \{a\}$ von f ?
Hinweis: Unterscheide die Fälle $a \in (-1, 1)$ bzw. $|a| = 1$.