Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 7

Abgabe: Montag, 5.12.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 27:
Sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge des $I\!R^n$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$||f||_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

für $p = 1$ und $p = 2$ eine Norm auf $C^0(\Omega, I\!R) := \{f : \Omega \to I\!R \,|\, f \text{ stetig } \}$ definiert.
(Dies gilt für alle $p \geq 1$. Die Vervollständigungen heissen $L^p(\Omega)$ Räume)

(b) Zeigen Sie, dass die von $||f||_p$ erzeugte Topolgie nicht mit der kompakten Topologie auf $C^0(\Omega, I\!R)$ übereinstimmt.

Aufgabe 28:
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $f : X \to X$.

(a) Sei f eine Kontraktion, d,h.es gibt eine Konstante $0 < k < 1$ mit $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt $x \in X$ besitzt, d.h $f(x) = x$.

(b) Gilt (a) auch falls $k = 1$?

(c) Finden Sie ein Beispiel eines nicht vollständigen metrischen Raumes und einer Kontraktion ohne Fixpunkt.

Aufgabe 29:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere die folgende Menge $\mathcal{U}$ von Teilmengen von $X \times X$:

$$U \in \mathcal{U} \;\Leftrightarrow\; \exists_{\epsilon>0} \;\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subset U$$

Zeigen Sie:
(a) Aus $U \in \mathcal{U}$ und $U \subset V$ folgt $V \in \mathcal{U}$.

(b) Aus $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ folgt $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}$.

(c) $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U, \quad \forall_{U \in \mathcal{U}}$,

(d) Aus $U \in \mathcal{U}$ folgt $\{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in U\} \in \mathcal{U}$.

(e) Aus $U \in \mathcal{U}$ folgt $\{(x, y) \in X \times X \mid \exists_{z \in X} \;\; (x, z) \in U,\; (z, y) \in U\} \in \mathcal{U}$.

($\mathcal{U}$ mit den Eigenschaften (a)-(e) heisst eine uniforme Struktur auf X.)

Aufgabe 30:
Seien (X, d), (Y, ρ) metrische Räume. Sei $\mathcal{U}$ die uniforme Struktur aus Aufgabe 29 auf X und $\mathcal{V}$ die uniforme Struktur auf Y
Zeigen Sie, dass $f : X \to Y$ genau dann gleichmässig stetig ist wenn

$$(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U} \text{ für alle } V \in \mathcal{V}.$$