# Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

## Blatt 8

Abgabe: Montag, 12.12.05, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

**Aufgabe 31:**

Sei $X$ ein lokalkompakter Raum, $Y$ ein metrischer Raum und $f_n : X \to Y$ eine gleichgradig stetige Folge. Es konvergiere $f_n(x)$ für jedes feste $x$ gegen $f(x)$. Dann kovergiert $f_n$ auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig und $f(x)$ ist stetig.

**Aufgabe 32:**

Sei $X$ ein zusammenhängender Raum und sei $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ gleichgradig stetig.
Zeigen Sie für $H(x) := \{f(x) \mid f \in H\}$:
Wenn $H(x_0)$ für ein $x_0$ beschränkt ist, dann ist $H(x)$ für alle $x \in X$ beschränkt.

**Aufgabe 33:**

Welche der folgenden Teilmengen von $C^0([0,1], \mathbb{R})$ ist relativ kompakt?

**(a)** $\{n \sin(\pi x) \mid n \in \mathbf{N}\}$

**(b)** $\{\sin(n\pi x) \mid n \in \mathbf{N}\}$

**(c)** $\left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| + \sup_{\substack{0 \le x, y \le 1 \\ x \ne y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < 1 \right\}$

**Aufgabe 34:**

Zeigen Sie folg. Version des Satzes von Stone Weierstrass für komplexwertige Funktionen:
Sei $X$ ein kompakter Hausdorff Raum. $D \subset C^0(X, \mathbf{C})$ erfülle:

(i) $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \ne x_2 \; \exists f \in D$ mit $f(x_1) \ne f(x_2)$

(ii) $D$ enthält eine konstante Funktion, wobei die Konstante ungleich 0 ist..

(iii) Mit $f \in D$ ist auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{f}$ in $D$.

Dann ist die von $D$ erzeugte Algebra $A(D)$ dicht in $C^0(X, \mathbf{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie Real- bzw. Imaginärteil.

**Aufgabe 35:**

Zeigen Sie, dass die folg. Menge von Funktionen dicht in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ ist:

$$\left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-nx} \mid N \in \mathbf{N}, a_n \in \mathbf{R} \right\}.$$