Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 10

Abgabe: Montag, 09.01.2006, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 43:
Sei X ein zusammenhängender und Y ein diskreter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ konstant ist.

Aufgabe 44:
a. Bestimmen Sie den Abbildungsgrad der Abbildung $f : S^1 \to S^1$, $f(x) = -x$.

b. Seien $f, g : S^1 \to S^1$ stetig und sei $f(x) \neq g(x)$ für alle $x \in S^1$. Zeigen Sie:

$$grad(f) = grad(g).$$

Benutzen Sie die Homotopie: $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)-tg(x)}{|(1-t)f(x)-tg(x)|}$ und Teil **a.**.

c. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig mit $grad(f) \neq 1$. Zeigen Sie die Existenz von $x, y \in S^1$ mit $f(x) = x$, $f(y) = -y$.
Gilt die Aussage auch für $grad(f) = 1$?

Aufgabe 45:
Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig und sei für ein $n \in \mathbf{N}$ und alle $x \in S^1$

$$e^{2\pi i/n} f(x) = f(^{2\pi i/n} x)$$

(f heisst dann äquivariant.)
Zeigen Sie: $\exists_{k \in \mathbf{Z}} \quad grad(f) = 1 + nk$.
Was gilt für den Abbildungsgrad, falls für ein $n \in \mathbf{N}$ und alle $x \in S^1$ gilt:

$$f(x) = f(^{2\pi i/n} x)$$

(f heisst dann invariant.)

Aufgabe 46:
Seien $f : S^1 \to I\!R^2$ und $\gamma : [0,1] \to R^2$ stetig mit $Bild(f) \cap Bild(\gamma) = \emptyset$. Dann gilt für die Windungszahl:

$$W(f, \gamma(0)) = W(f, \gamma(1)).$$

Aufgabe 47:
Gibt es eine stetige und surjektive Abbildung $f : S^1 \to S^1$ mit Abbildungsgrad 0 ?