Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 11

Abgabe: Montag, 16.01.2006, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 48:
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ ein stetig differenziebarer geschlossener Weg, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma'(0) = \gamma'(1)$. Weiter sei $z \notin Bild(\gamma)$.

a. Zeigen Sie die Existenz stetig differenzierbarer Funktionen $R(t) > 0$, $F(t)$, sodass gilt:

$$\gamma(t) = z + R(t)e^{2\pi i F(t)}$$

b. Zeigen Sie für die Windungszahl von γ um z:

$$W(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$$

Aufgabe 49:
Sei G eine topologische Gruppe, d.h. G ist ein topologischer Raum mit stetiger Gruppenoperation $\cdot$ und stetiger Inversenbildung. Sei $e \in G$ das Einselement in G. Definiere die folgende Verknüpfung $\circ$ auf dem Schleifenraum $\Omega(G, e)$:

$$(\alpha \circ \beta)(t) := \alpha(t) \cdot \beta(t)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\circ$ eine Gruppenstruktur auf den Homotopieklassen $\pi_1(G, e)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\circ$ mit der üblichen Gruppenstruktur auf $\pi_1(G, e)$ übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h. es gilt das Kommutativgesetz.

Aufgabe 50:
Seien K, X topologische Räume und $[K, X]$ die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen von K nach X.

(a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f_* : [K, X] \to [K, Y] \quad \text{mit} \quad f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$$

wohldefiniert ist.

(b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann gilt

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

(c) Es gilt: $(id_X)_* = id_{[K,X]}$.

(d.h. die Zuordnung $(X, f) \to ([K, X], f_*)$ ist ein Funktor)

Aufgabe 51:
Sei $f : S^1 \to S^1 \subset \mathbf{C}$ stetig mit $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$, $f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$ für ω aus dem Schleifenraum $\Omega(S^1, 1)$ folg. Form hat:

$$f_*([\omega]) = \underbrace{[\omega] * \ldots * [\omega]}_{grad(f)}$$