Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 12

Abgabe: Montag, 23.01.2006, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 52:

a. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des Möbiusbandes (vgl. Aufg. 13 Blatt 3).

b. Seien $p, q \in S^n$, $p \neq q$. Bestimmen Sie $\pi_1(S^n \setminus \{q\}, p)$.

c. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig bzgl. $\{0\}$, d.h. aus $x \in X$ folgt $tx \in X$ für alle $t \in [0,1]$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, 0)$.

Aufgabe 53:

Sei $p \in S^1$. Zeigen Sie, dass $S^1 \times \{p\}$ Retrakt, aber kein Deformationsretrakt von $S^1 \times S^1$ ist.

Aufgabe 54:

(Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes)

Sei A eine $n \times n$ Matrix mit positiven Einträgen. Zeigen Sie, das A einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ hat mit einem Eigenvektor x mit positiven Einträgen.

Hinweis: Betrachten Sie auf $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ die Abbildung $f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i}$

Aufgabe 55:

a. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der reellen Vektorräume. Für einen Vektorraum V sei V^* der Dualraum und für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sei $f^* : W^* \to V^*$ die adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass die Zuordung $(V, f) \to (V^*, f^*)$ einen kontravariaten Funktor von $\mathcal{C}$ in sich definiert.

b. Seien A, X, Y topolgische Räume. Es bezeichne $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y.

Die Objekte von $\mathcal{C}$ seien bei festem Raum A:

$$Ob(\mathcal{C}) := \{[X, A] \mid X \quad \text{topolgischer Raum } \}$$

und die Morphismen seien:

$$Mor([X, A], [Y, A])) : \{f_* : [Y, A] \to [X, A] \mid f_*([\phi]) := [\phi \circ f], \quad f : X \to Y \quad \text{stetig } \}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ eine Kategorie ist.

Ist die Zuordnung $(X, f) \to ([x, A], f_*)$ ein ko- oder kontravarianter Funktor?