Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2005/06

Blatt 13

Abgabe: Montag, 30.01.2006, 10.00 Uhr, Kastennummer 60

Aufgabe 56:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

a. Zeigen Sie die Eindeutigkeit von $id_X \in C(X,X)$.

b. Zeigen Sie für einen Isomorphismus $f \in C(X,Y)$, dass Rechtsinverses und Linksinverses übereinstimmen und eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 57:
a. Zeigen Sie, dass $p : S^1 \to S^1 \subset \mathbf{C}$, $p(z) = z^n$ für $n \in \mathbf{Z}$ eine Überlagerung ist.
b. Sei P^n der reell projektive Raum $P^n = S^n/\sim$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$. Zeigen Sie, dass die Projektion $p : S^n \to P^n$, $p(x) = \{x, -x\}$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 58:
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe. Auf G sei folg. Relation definiert:

$$g_1 \sim g_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1^{-1} \circ g_2 \in H$$

a. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert und die Äquivalenzklassen durch $[g] = g \circ H := \{g \circ h \mid h \in H\}$ gegeben sind.

b. Zeigen Sie, dass $[g_1] \circ [g_2] := [g_1 \circ g_2]$ genau dann eine Gruppenstuktur auf $G/\sim$ definiert wenn $g \circ H = H \circ g$ für alle $g \in G$ gilt. H heisst dann ein Normalteiler von G und die Gruppe $G/\sim$ wird mit G/H bezeichnet.

c. Erhält man dieselbe Gruppe G/H, falls man $g_1 \sim g_2$ durch $g_1 \circ g_2^{-1} \in H$ definiert ?

d. Sei $SO(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = \mathbf{I},\ det(A) = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die folgende Untergruppe von $SO(3)$:

$$H := SO(2) \times \{1\} = \{A \in SO(3) \mid A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Ist H ein Normalteiler ?

Aufgabe 59:
Ein topologischer Raum heisst lokal wegzusammenhängend, falls jede Umgebung eine wegzusammenhängende Umgebung enthält.
Zeigen Sie, dass

$$X := \{(x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbf{N}, 0 \le x \le 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

mit der Unterraumtopologie des $\mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend ist.