Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Di, 18.04.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 2

Aufgabe 6:

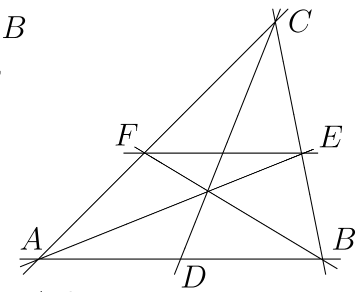
a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe nicht Vereinigung zweier echter Untergruppen sein kann.
b) Beweisen Sie, dass es in einer Gruppe gerader Ordnung mindestens zwei selbstinverse Elemente gibt.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Symmetriegruppe des Würfels. Tipps:

a) Es gibt genau sechs Symmetrien, die eine gegebene Ecke fest lassen.
b) Es gibt insgesamt genau 48 Symmetrien. Können Sie ihre Matrizen angeben?

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\frac{x^3}{x+1}) \subseteq \mathbb{Q}(x)$. Zeigen Sie, dass dies eine endliche einfache Erweiterung ist und bestimmen Sie das Minimalpolynom von x.

Aufgabe 9:
Für die Menge $M = \{0, 1, i, 1+i, z\} \subseteq \mathbb{C}$ mit $z \notin \{0, 1, i, 1+i, \frac{1}{2}(1+i)\}$ bezeichne M_L die Menge aller aus M nur mit dem Lineal konstruierbaren Punkte. Die erlaubten Operationen sind dabei die Konstruktion von Geraden durch zwei bereits konstruierte Punkte und der Schnitt zweier bereits konstruierter Geraden. Zeigen Sie:



a) In der nebenstehenden Figur sind die Geraden durch A, B bzw. E, F genau dann parallel, wenn D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.
b) Mit dem Lineal sind die folgenden Konstruktionen durchführbar:
   i) Konstruktion der Parallelen zu einer der Koordinatenachsen durch einen Punkt,
   ii) Übertragung einer Strecke von der x-Achse auf die y-Achse,
   iii) Addition reellen Zahlen,
   iv) Multiplikation reeller Zahlen,
   v) Konstruktion von a^{-1} für $a \in \mathbb{R}$.
c) Ist $\overline{M} = \{0, 1, -i, 1-i, \overline{z}\}$, so gilt $M_L = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$.

Aufgabe 10:
Sei $M = \{0, 1, i, 1+i\} \subseteq \mathbb{C}$ und K der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Zusätzlich zu den aus M mit dem Lineal konstruierbaren Punkten sollen alle Punkte als konstruierbar gelten, die Schnittpunkte bereits konstruierter Geraden mit dem Kreis K sind. Zeigen Sie, dass dann die Menge aller mit dem Lineal konstruierbaren Punkte der Menge aller aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte entspricht.