Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 08.05.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 5

Aufgabe 21:
Sei p eine Primzahl und $\pi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,[x]$ der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie:

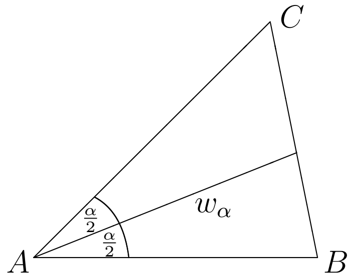
a) Ist $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Polynom und $\pi(f)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,[x]$, dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.
b) Die Aussage in a) gilt i.A. nicht, wenn f nicht normiert ist.
c) Die Umkehrung von a) gilt nicht.

Aufgabe 22:
Entscheiden Sie, ob die folgenden Polynome irreduzibel sind.

a) $x^3 - 2$, $x^5 - 2x^4 + 6x + 10$, $x^4 - 6x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
b) $x^2 + 5x + 1$, $x^3 + 6x^2 + 11x + 8 \in \mathbb{Q}[x]$.
c) $x^3 + 6x^2 + 8x + 4$, $x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
d) $x^3 - y^3$, $y^4 + (x+1)^2y^2 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

Aufgabe 23:
a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. [Hinweis: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x], \varphi(x) = x + 1$.]

b) Im nebenstehenden Dreieck seien die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sowie die Länge der Winkelhalbierenden w_α gleich 1. Zeigen Sie, dass dann das Dreieck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.



Aufgabe 24:
Sei K ein Körper und $K(x)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten x über K. Zeigen Sie:

a) Für jedes algebraische Element a von $K(x)$ gilt $a \in K$.
b) Die Körpererweiterung $K(x)/K$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper.

Aufgabe 25:
Sei R ein faktorieller Ring und $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ ein minimales Primideal von R, d.h. für jedes Primideal $I \subseteq R$ mit $\{0\} \neq I \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $I = \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathfrak{p}$ bereits ein Hauptideal von R ist.