Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 15.05.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 6

Aufgabe 26:
Sei R ein Integritätsbereich und S ein Ring. Zeigen Sie:

a) Ein Ideal $I \subseteq S$ ist genau dann ein Primideal, wenn S/I ein Integritätsbereich ist.
b) Ein Element p ist genau dann prim in R, wenn $p \neq 0$ und $\langle p \rangle$ ein Primideal von R ist.
c) Ist p ein Primelement von R, so ist p auch ein Primelement von $R[x]$.
d) Ist R ein Hauptidealring, so ist jedes Ideal $I \subseteq R$ genau dann prim, wenn es maximal ist.

Aufgabe 27:
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$. Zeigen Sie:

a) Sind die Elemente 2 und $a^2 + b^2 + (a-b)^2$ Quadrate in K, so ist die Ableitung f' von $f(x) = x(x-a)(x-b)$ reduzibel in $K[x]$.
b) Ist 3 ein Quadrat in K, so ist $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3b^2x + 9ab^2$ das Produkt von drei Linearfaktoren aus $K[x]$.
c) Die Ableitung jedes normierten Polynoms $f \in K[x]$ vom Grad 3, das Produkt von drei Linearfaktoren ist, ist genau dann reduzibel in $K[x]$, wenn für alle $a, b \in K$ das Element $a^2 + b^2$ ein Quadrat in K ist.

Definition: Ein Körper K heißt *vollkommen*, wenn K die Charakteristik Null hat oder im Fall $\mathrm{char}(K) = p > 0$ jedes Element von K eine p-te Wurzel in K besitzt.

Aufgabe 28:
Zeigen Sie, dass ein Körper K genau dann vollkommen ist, wenn für jedes Polynom $f \in K[x] \setminus K$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) f ist quadratfrei.
b) Es gilt $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$.

Aufgabe 29:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $s_1^{(n)}, \ldots, s_n^{(n)}$ die elementarsymmetrischen Polynome in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass für $k = 2, \ldots, n+1$ die folgende Rekursionsformel gilt:

$$s_k^{(n+1)} = s_k^{(n)} + s_{k-1}^{(n)} x_{n+1}.$$

Aufgabe 30: (Transzendenz von e)
Beweisen Sie die Transzendenz von e über $\mathbb{Q}$. Gehen Sie dabei wie im Beweis von Satz 7.8 über die Transzendenz von π vor.
[Hinweis: Verwenden Sie das Polynom $f(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.]