Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 12.06.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 10

Aufgabe 46:
Zeigen Sie, dass die jeweiligen Gruppen isomorph sind:

a) $\langle a, b : abab^{-1}a^{-1}b^{-1} = 1\rangle \cong \langle c, d : c^3d^{-2} = 1\rangle$.
b) $\langle a, b, c : b(abc^{-1})^2a = 1, c(abc^{-1})^3 = 1\rangle \cong F(x, y)$.
c) $C_{mn} \cong \langle a, b : a^m = 1, b^n = 1, [a, b] = 1\rangle$, falls m und n teilerfremd sind.

Aufgabe 47:
Sei G eine Gruppe mit der Präsentierung $\langle a_1, \dots, a_n : r_1 = 1, \dots, r_m = 1\rangle$ und N ein von $\{s_1, \dots, s_t\}$ erzeugter Normalteiler von G. Bestimmen Sie eine Präsentierung der Faktorgruppe G/N.

Aufgabe 48:
Für eine Gruppe G mit einer gegebenen Präsentierung lassen sich die folgenden fundamentalen Entscheidungsprobleme formulieren:

1) Entscheide in endlich vielen Schritten, ob ein Wort w in den Erzeugern von G äquivalent zum leeren Wort ist oder nicht. (*Wortproblem*)
2) Entscheide in endlich vielen Schritten, ob zwei Wörter w und w' in den Erzeugern von G konjugiert zueinander sind. (*Konjugationsproblem*)

Beweisen Sie, dass sowohl das Wort- als auch das Konjugationsproblem für die von $\{a, b, c\}$ erzeugte Gruppe G mit den Relationen

$$a^{-1}bac^{-1} = 1, a^{-1}cab^{-1} = 1, b^{-1}abc^{-1} = 1, b^{-1}cba^{-1} = 1, c^{-1}acb^{-1} = 1, c^{-1}bca^{-1} = 1$$

lößbar ist. Zeigen Sie dazu:

a) Es gilt $a^2 = b^2 = c^2$ und $ab = bc = ca$.
b) Die Elemente der Menge $H = \{a^{2k}, a^{2k+1}, a^{2k}b, a^{2k}c, a^{2k+1}b, a^{2k}ba \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sind paarweise nicht äquivalent, und jedes Wort in den Erzeugern von G ist äquivalent zu einem Wort aus H.
c) Die Elemente in $H' = \{a^{2k}, a^{2k+1}, a^{2k+1}b \mid k \in \mathbb{Z}\}$ besitzen paarweise keine äquivalenten Konjugate, und zu jedem Wort in den Erzeugern von G existiert ein Konjugat, das zu einem Element aus H' äquivalent ist.