

## Algebra I Übungsblatt 12

### Aufgabe 53:

Zeigen Sie, dass jede Gruppe  $G$  mit Ordnung  $|G| < 36$  auflösbar ist.

### Aufgabe 54:

Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

- a)  $G$  ist genau dann endlich erzeugt, wenn es für ein  $n \in \mathbb{N}$  einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z}^n \rightarrow G$  gibt.
- b) Jede Untergruppe von  $\mathbb{Z}^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ist endlich erzeugt.
- c) Ist  $G$  endlich erzeugt, so ist auch jede Untergruppe von  $G$  endlich erzeugt.
- d) Die *Torsionsgruppe*  $T(G) = \{g \in G \mid \text{ord}_G(g) < \infty\}$  von  $G$  ist endlich, falls  $G$  endlich erzeugt ist.

### Aufgabe 55:

Für eine abelsche Gruppe  $G$  und eine Primzahl  $p$  heißt die Untergruppe

$$T_p(G) = \{g \in G \mid \text{ord}_G(g) = p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$$

von  $G$  die  $p_i$ -*Torsionsgruppe* von  $G$ .

Sei nun  $G$  eine abelsche Gruppe der Ordnung  $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$  mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_1, \dots, p_r$  und Zahlen  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- a) Es gilt  $G \cong T_{p_1}(G) \times \cdots \times T_{p_r}(G)$ .
- b) Für  $i = 1, \dots, r$  ist  $T_{p_i}(G)$  die einzige  $p_i$ -Sylowuntergruppe von  $G$ .

### Aufgabe 56:

Zeigen Sie:

- a) Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist unendlich.
- b) Der algebraische Abschluss von  $\mathbb{F}_p$  besteht genau aus allen Einheitswurzeln über  $\mathbb{F}_p$  und 0.