

## Algebra I Übungsblatt 13

### Aufgabe 57:

Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von  $f$  über  $\mathbb{Q}$ :

- a)  $f(x) = x^3 - 19x + 30$ ,
- b)  $f(x) = x^5 - 1$ ,
- c)  $f_a(x) = x^3 - ax^2 + (a - 3)x + 1$  mit  $a \in \mathbb{Z}$ .  
[Tipp: Mit  $b \in \mathbb{R}$  sind auch  $\frac{1}{1-b}$  und  $\frac{b-1}{b}$  Nullstellen von  $f_a$ .]

### Aufgabe 58:

Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$  und  $L/K$  eine Körpererweiterung von  $K$ . Zeigen Sie:

- a) Ist  $a \in L$  algebraisch, so existiert eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $a^{p^n}$  separabel über  $K$  ist.
- b) Ist  $L/K$  endlich und  $p$  kein Teiler von  $[L : K]$ , so ist  $L/K$  separabel.

### Aufgabe 59:

Sei  $K$  ein Körper,  $K(t)$  der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten  $t$  über  $K$  und  $u = \frac{f}{g}$  mit teilerfremden  $f, g \in K[t] \setminus K$ . Zeigen Sie:

- a) Das Polynom  $f(x) - ug(x) \in K(u)[x]$  ist irreduzibel.
- b) Die Körpererweiterung  $K(t)/K(u)$  ist genau dann separabel, wenn  $f' \neq 0$  oder  $g' \neq 0$  gilt.

### Aufgabe 60:

Sei  $K$  ein Körper und  $L/K$  eine Körpererweiterung von  $K$ . Zeigen Sie:

- a) Ist  $[L : K] = 2$ , so ist  $L/K$  normal.
- b) Für Zwischenkörper  $M_1$  und  $M_2$  von  $L/K$  heißt der Körper  $M_1M_2 = K(M_1 \cup M_2)$  das *Kompositum* von  $M_1$  und  $M_2$ . Sind die Körpererweiterungen  $M_1/K$  und  $M_2/K$  normal, so ist auch  $M_1M_2/K$  normal.

### Aufgabe 61:

Sei  $a = (1 + i)\sqrt[4]{5}$ . Zeigen Sie:

- a) Die Körpererweiterungen  $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$  und  $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})/\mathbb{Q}$  sind normal.
- b) Die Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$  ist nicht normal.