Prof. Dr. M. Kreuzer
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 10.07.2006, 12h

Algebra I
Übungsblatt 14

Aufgabe 62:
Sei L der Zerfällungskörper von $x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ und alle Untergruppen der Galoisgruppe $G(L/K)$.

Aufgabe 63:
Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom. Ist L der Zerfällungskörper von f über K, so heißt $G(f : K) = G(L/K)$ die *Galoisgruppe* von f über K. Sei nun f irreduzibel über K. Zeigen Sie:

a) Enthält K alle n-ten Einheitswurzeln für $n \geq 2$, so gilt $G(f : K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
b) Ist $p = \deg(f)$ eine Primzahl und enthält $G(f : K)$ ein Element der Ordnung p sowie eine Transposition, so gilt $G(f : K) \cong S_p$.
c) Sei p prim und $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(f) = p$. Hat f genau zwei nicht-reelle Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $G(f : \mathbb{Q}) \cong S_p$.
d) Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit abelscher Galoisgruppe $G(f : \mathbb{Q})$, so ist $G(f : \mathbb{Q})$ eine Gruppe der Ordnung $\deg(f)$.

Aufgabe 64:
Bestimmen Sie die Galoisgruppe der folgenden Polynome:

a) $f(x) = x^3 - 10 \in \mathbb{Q}[x]$,
b) $f(x) = x^p - a \in K[x]$ mit $a \in K$ und $\mathrm{char}(K) = p > 0$,
c) $f(x) = x^n - a \in \mathbb{C}(a)[x]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und a transzendent über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 65:
Sei K ein Körper und $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über K. Zeigen Sie:

a) Sind $s_0, \ldots, s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ über K und ist $M = K(s_0, \ldots, s_n)$, so ist die Körpererweiterung L/M Galoissch vom Grad $n!$.
b) Das *allgemeine Polynom n-ten Grades* $f(x) = x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_{n-1}x + y_n \in K(y_1, \ldots, y_n)[x]$ ist über $K(y_1, \ldots, y_n)$ für $n \geq 5$ nicht durch Radikale auflösbar.