Übungsblatt 1

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 19.04.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Seien $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ und $||\cdot||$ die Operatorennorm. Zeigen Sie:

a)
$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||.$$

b) $||\cdot||$ ist tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{L}(E, F)$.

c) $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Für $A \in \mathcal{L}(E, F)$ sei
$$e^A := \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Exponentialreihe in $\mathcal{L}(E, F)$ absolut konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass
$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$$
für alle $B \in \mathcal{L}(E, F)$ gilt.

c) Berechnen Sie e^A, falls $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ repräsentiert wird.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{n\times m}$ die Menge der reellen $n \times m$ -Matrizen. Betrachten Sie die Determinantenfunktion
$$\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$$
mit $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) := ad - bc$. Sei $\mathbf{1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass
$$D_A \det(\mathbf{1}) = \operatorname{tr} A,$$
d.h. dass die Richtungsableitung $D_A \det(\mathbf{1})$ gleich der Spur von A ($\operatorname{tr} A := a + d$) ist.