Übungsblatt 2

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 26.04.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) f ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar.

b) In $(0,0)$ existieren alle Richtungsableitungen, aber f ist dort unstetig.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Beweisen Sie Lemma 6.7 aus der Vorlesung: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $f = (f_1, ..., f_m) : X \to \mathbb{R}^m$ gilt:

f ist [stetig] differenzierbar genau dann, wenn für jedes $j \in \{1, ..., m\}$ f_j [stetig] differenzierbar ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Gegeben seien folgende Abbildungen:

i) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(\theta, \phi) := \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

ii) $g : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $r > 0$ und

$$g(\theta, h) := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ h \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie das Bild von f und g als Fläche im $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix von f und g bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x - y^2$. Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist:

a) mit einem Satz aus der Vorlesung,

b) mit der Definition.