Übungsblatt 3

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 3.05.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin((x^2+y^2))^{-\frac{1}{2}}), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) f ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar.

b) In $(0,0)$ ist f zwar differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle, \quad \forall\ x, y \in E.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.
Benutzen Sie für den Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle.$$

Folgern Sie hieraus die Ungleichung, indem Sie

$$\alpha := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

wählen.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

- $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x_0, x \rangle^2,$
- $\mathbb{R}^m \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{||x||_2}.$

b) Für $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $f_j \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), j = 1, ..., m$, berechne man den Gradienten von

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad (x_1, ..., x_m) \mapsto g(f_1(x_1), ..., f_m(x_m)).$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \sin(||f(x)||_2^2)$$

stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie ∇g.