Übungsblatt 4

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 10.05.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^k_{x_0} f(x)$ folgender Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to \cos x \cos y, \quad k = 3,\ x_0 = (0, 0).$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to (x - y)e^{x+y}, \quad k = 3,\ x_0 = (0, 0).$

c) $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to \frac{x-y}{x+y}, \quad k = 2,\ x_0 = (1, 1).$

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Warum kann man die Näherungsrechnung

$$\sqrt{2,99^2 + 4,02^2} = \sqrt{(3 - 0,01)^2 + (4 + 0,02)^2} \approx 5,01$$

machen?
(Hinweis: Taylorformel für eine geeignete Funktion $f(x, y)$.)

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Sei $GL(n, \mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren Matrizen und $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL(n, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $A(0) = I$ (wobei I die Einheitsmatrix ist).
Sei $f(t) := \det(A(t))$. Zeigen Sie:

$$f'(0) = \mathrm{tr}\dot{A}(0),$$

wobei $\mathrm{tr}(a_{ij})_{1\le i,j\le n} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(Hinweis: Bezeichnet man die Spaltenvektoren von A mit $a_1, ..., a_n$, so ist $\det(A) = \det(a_1, ..., a_n)$ eine n-multilineare Abbildung. Benutzen Sie die Multilinearität der Determinantenfunktion, indem Sie
$\det(e_1 + h\dot{a}_1(t), ..., e_n + h\dot{a}_n(t)) = \det(e_1, e_2 + h\dot{a}_2(t), ..., e_n + h\dot{a}_n(t)) + \det(h\dot{a}_1(t), ..., e_n + h\dot{a}_n(t))$ u.ä. betrachten.)

b) Alle Bezeichnungen seien wie in a), aber wir verzichten diesmal auf die Einschränkung $A(0) = I$. Zeigen Sie durch Zurückführung auf a):

$$f'(0) = \det(A(0)) \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}(0)\dot{A}(0)).$$