

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 17.05.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + C.$$

Wie muss die Konstante C gewählt werden, damit f ein lokales Extremum mit Wert 0 hat?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Haben folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lokale Extrema? Bestimmen Sie ggf. deren Typ.

a) $f(x, y) := x^2(2 - y) - y^3 + 3y^2 + 9y.$

b) $f(x, y) := 2(y - 3)^2 - 5(x + 2)^3.$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$

a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie dort die Jacobimatrizen von f und f^{-1} .

b) Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich an, auf dem die Einschränkung von f ein Diffeomorphismus ist.

Dies entspricht der Einführung von **Polarkoordinaten**.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Für die Abbildung $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ und $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bestimme man $Y := f(X)$. Entscheiden Sie, ob f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich an, auf dem die Einschränkung von f ein Diffeomorphismus ist.

b) Wo ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (\sin x \cosh y, \cos x \sinh y)$ ein lokaler C^∞ -Diffeomorphismus?

(Hinweis zu a): Welcher Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} entspricht f , wenn man \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} gemäß $z := x + iy$ identifiziert?)