Übungsblatt 6

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 24.05.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Sei $f : X \subset E \to F$ eine C^1-Abbildung auf einer offenen Menge $X \subset E$, so dass $Df(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar ist. Dann ist das Bild $f(X)$ offen.

b) Sei $f : X \subset E \to F$ eine injektive C^1-Abbildung auf einer offenen Menge $X \subset X$, so dass $Df(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar ist. Dann ist f ein Diffeomorphismus von X auf $f(X)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes (2, 5) durch eine C^1-Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ mit $u(2, 5) = -1$ und $v(2, 5) = 0$ aufgelöst werden kann, und berechne deren Jacobi-Matrix in diesem Punkt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ hat. Man zeige, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechne $Dg(1, 1)$.
[Zusatzfrage: Kann man $g(x, y)$ durch eine Formel angeben?]

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Für die Funktion $y = y(x)$, die durch

$$f(x, y) := x \cot y + y \text{ arccot } x - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

in der Nähe von $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ in impliziter Form gegeben ist, berechne man $y'(x)$ und $y'(x_0)$.

b) Für die Funktion $z = z(x, y)$, die durch

$$f(x, y, z) := y^2 - 2^{-z}(x - z) = 0$$

in der Nähe von $(x_0, y_0, z_0) = (7, 4, -1)$ in impliziter Form gegeben ist, berechne man $Dz(x, y)$ und $Dz(x_0, y_0)$.