Übungsblatt 8

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 7.06.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{SL}(n) = \det^{-1}(1)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$.

b) $T_1 SL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid trA = 0\}$, wobei 1 die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

(Hinweis: Übungsblatt 4, Aufgabe 3 a)).

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Der Abschluss eines Untervektorraums $U \subseteq E$ ist wieder ein Untervektorraum.

b) Ein abgeschlossener Untervektorraum eines Banachraums ist wieder ein Banachraum.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass eine Regelfunktion, die an endlich vielen Stellen abgeändert wird, immer noch eine Regelfunktion ist mit demselben Integral.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass man an unendlich vielen Stellen abändert.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & x \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}) \cup (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) $f \in T([-1, 1], \mathbb{R})$,

   ii) $f \in R([-1, 1], \mathbb{R})$.

b) Falls möglich, berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f$.