Übungsblatt 9

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 14.06.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass
$$\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 \sqrt[n]{x} dx = 1$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und geben Sie auch eine zeichnerische Begründung.

b) Sei $f \in R([-a,a],\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

i) Ist f gerade (d.h. $f(-x) = f(x)\ \forall\ x$), dann gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.

ii) Ist f ungerade (d.h. $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x$), dann gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Geben Sie auch hier eine Begründung anhand einer Skizze.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f \in C^0(I,[0,\infty))$ mit $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$.
Zeigen Sie, dass dann $\int_I f > 0$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass jede monoton steigende Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $R([a,b],\mathbb{R})$ liegt.
(Hinweis: Zerlegen Sie den *Werte*bereich von f in Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$.)

Aufgabe 3. (4 Punkte) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der von den beiden Kurven $x^2 = 2(y-2)$ und $y = x+6$ begrenzten Fläche im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann gilt
$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 + (f'(x))^2 dx.$$
(Hinweis: Es sei $x_0 \in [a,b]$ mit $(f(x_0))^2 = \|f\|_\infty^2$. Zeigen Sie zuerst, dass $(f(x_0))^2 = \int_a^{x_0} ff'dx - \int_{x_0}^b ff'dx$.)